

04	Teoría de Conjuntos Teoría de Conjuntos Descriptiva
60	Probabilidad y Procesos Estocásticos Procesos de Markov
03B	Lógica General Lógica Modal

Procesos de Markov Etiquetados sobre Espacios Borel Estándar

Autor: Pablo Gabriel Celayes.¹

Director: Dr. Pedro R. D'Argenio.

Co-director: Lic. Pedro O. Sánchez Terraf

Facultad de Matemática, Astronomía y Física — U.N.C.

3 de noviembre de 2006

¹con el apoyo de la Agencia Córdoba Ciencia, a través del programa de becas ConCiencias

Resumen

Revisamos la teoría de LMP (Labelled Markov Processes), desarrollada en [99Des], cuyos conceptos más importantes son la relación de bisimulación y su caracterización por una lógica modal simple $\mathcal{L}_>$. En dicho trabajo tenían importancia fundamental ciertos resultados de teoría de conjuntos descriptiva (espacios Polacos y conjuntos analíticos, [95Kec]) y teoría de la medida (λ - π de Dynkin, [86Bil]). Estudiamos en detalle la teoría necesaria para probar estos resultados, logrando un entendimiento más profundo de las razones que llevaron a emplear espacios analíticos como base de la teoría de LMP.

Partiendo de las definiciones de [06W-D'A], introducimos el concepto de NLMP (Non-deterministic LMP) y adaptamos el teorema de caracterización lógica de la bisimulación a este nuevo tipo de procesos, empleando extensiones apropiadas de $\mathcal{L}_>$ y trabajando sobre espacios Polacos de estados en vez de analíticos.

Agradecimientos

En ningún orden particular:

A mis directores (Pedro²) por soportar mi extenso proceso de entrada en ritmo. A la Agencia Córdoba Ciencia, por financiarme un año de entrada en ritmo y esperarme otros tres meses. A mis viejos por la libertad, la confianza y la apertura. A la Lore por la alegría. A Ana por bancarme que me reparta entre despedirla y terminar el trabajo. A la Olimpiada Matemática Argentina por la oportunidad de descubrir y desarrollar mi pasión por este arte-ciencia. A la gente del Despacho de Alumnos por la buena onda y la paciencia para tratar este caso patológico. A los compañeros de cualquier tipo de viaje. A la familia grande por quererme en mi locura. A los pibes del cole, por tantos momentos de volver a ser los de siempre. A La Banda Del Tío por darme un lugar donde dejar de pensar por dos horas semanales. A mi otra banda por el espacio de catarsis musical. A mi pequeña lista de amigos imprescindibles. A mis fuentes de inspiración. Y a todos los que me olvidé también.

Índice general

1. Introducción	1
2. Teoría de Conjuntos Descriptiva	3
2.1. Introducción	3
2.2. Espacios Métricos	3
2.3. Árboles	5
2.3.1. Definiciones Básicas	5
2.3.2. Árboles y Conjuntos Cerrados	6
2.4. Espacios Polacos	7
2.4.1. Definiciones y Ejemplos	7
2.4.2. Extensiones de Funciones Continuas y Homeomorfismos	8
2.4.3. Espacios Polacos Perfectos	10
2.4.4. Polacos como Imágenes Continuas de \mathcal{N}	12
2.5. Conjuntos Borel	13
2.5.1. σ -álgebras y Generadores	13
2.5.2. Espacios y Funciones Medibles	14
2.5.3. Conjuntos y Funciones Borel	15
2.5.4. Espacios Borel Estándar	16
2.5.5. Borel como Imágenes de \mathcal{N}	18
2.6. Conjuntos Analíticos y el Teorema de Separación	18
2.7. Teoría de la Medida	21
2.7.1. Probabilidades y Subprobabilidades	21
2.7.2. Lemas de Coincidencia	22
3. Aplicación a Procesos de Markov Etiquetados	25
3.1. Introducción	25
3.2. NLMP	26
3.3. Simulación y Bisimulación	28
3.3.1. Conjuntos R -cerrados	28
3.3.2. Simulación	29
3.3.3. Bisimulación	30

3.4.	LMP a la Desharnais	31
3.5.	Lógicas Modales	33
3.5.1.	Sintaxis	33
3.5.2.	Semántica	33
3.6.	Caracterización Lógica de la Bisimulación	34
3.6.1.	Resultados Centrales	35
3.6.2.	Cada Loco con su Lógica	36
3.6.3.	Teorema de Caracterización	40
4.	Conclusiones y Trabajo Futuro	41

Capítulo 1

Introducción

La teoría de LMP (Labelled Markov Processes) desarrollada en [99Des] se ocupa del análisis de sistemas probabilistas sobre un espacio de estados continuo, e introduce una noción de equivalencia entre tales sistemas —la relación de bisimulación, inspirada en la versión discreta de [91LS]— que formaliza el concepto de que dos sistemas tengan el mismo “comportamiento observable”. La tarea de analizar y razonar sobre un sistema, se hace mucho más precisa si se establecen métodos formales a tal fin. Un método formal es un conjunto de lenguajes, técnicas y herramientas de gran rigor matemático, empleado para especificar (describir) y verificar sistemas. Un objetivo general en esta área es abordar el estudio de las propiedades observables de los LMP mediante métodos formales. Como primer paso en esta dirección, se probó que la bisimulación está caracterizada por una lógica modal simple $\mathcal{L}_>$ (sin negación), siendo equivalentes sólo aquellos sistemas con las mismas propiedades definibles en dicha lógica. Para demostrar este resultado fueron esenciales algunos teoremas y técnicas de teoría de la medida, junto con propiedades de los espacios analíticos.

Tomando esto como motivación, estudiamos los conceptos básicos de teoría descriptiva de conjuntos necesarios para llegar a demostrar toda la maquinaria matemática empleada en [99Des], y comprender con más profundidad las razones que llevaron a emplear espacios analíticos en la definición. A partir de ahí, buscamos extender los resultados de caracterización lógica a procesos no deterministas (los NLMP, Non-deterministic Labelled Markov Processes), partiendo de las definiciones básicas de [06W-D’A]. Veremos que la teoría de NLMP y LMP puede construirse tomando sólo espacios Polacos como conjuntos de estados, que si bien son menos generales que los analíticos, tienen una definición menos técnica y un poco más cercana a la intuición. Esto es posible si definimos las relaciones sobre un mismo sistema (prescindiendo del enfoque categórico), lo que evita trabajar con espacios cociente (una de las principales razones para emplear espacios analíticos de estados en [99Des]). Reconstruimos el teorema de caracterización para nuestras definiciones, e introducimos un conjunto de lógicas modales más expresivas para varias familias cada vez más amplias de NLMP (llegando hasta los NLMP de imagen finita, aquellos con grados

finitos arbitrarios de no determinismo).

El capítulo 2 abarca los contenidos de teoría descriptiva de conjuntos y teoría de la medida. Allí definimos las herramientas básicas (espacios métricos, árboles, espacios de Cantor y de Baire) y realizamos un breve estudio de los espacios Polacos, y sus subconjuntos Borel y analíticos. Es de fundamental importancia en la teoría de NLMP el Teorema de Separación de Lusin, y sus aplicaciones a las relaciones de equivalencia Borel (Teorema de Blackwell) y a la medibilidad de ciertas proyecciones (Lusin-Novikov). Al final del capítulo probamos dos resultados útiles sobre coincidencia de medidas. El primero de ellos aparecía sin prueba en [99Des], el segundo es un lema que probamos para poder caracterizar la bisimulación en 2-NLMP por una lógica simple.

En el capítulo 3, partiendo de [06W-D'A], se introducen las definiciones básicas de NLMP y la relación de bisimulación sobre ellos, junto con las pruebas de algunas propiedades de esta relación. Se incluye una sección de “interfaz con Desharnais”, que muestra como adaptar nuestras definiciones a las de [99Des]. Definimos luego las lógicas modales a emplear en la caracterización. Por último se aborda la prueba de caracterización lógica, dando una prueba estructural que engloba todas aquellas propiedades que no dependen de la lógica usada. Una vez hecho esto, probar la caracterización para una lógica en particular se reducirá a probar que ésta satisface una cierta hipótesis de coincidencia de medidas. Concluimos aplicando lo anterior a la prueba de caracterización de la bisimulación para cuatro clases de NLMP por distintas lógicas modales.

Capítulo 2

Teoría de Conjuntos Descriptiva

2.1. Introducción

La teoría de conjuntos descriptiva es el estudio de los *conjuntos definibles* en *espacios Polacos* (i.e., espacios completamente metrizables y separables). En esta teoría los conjuntos son clasificados en jerarquías, de acuerdo a la complejidad de sus definiciones, y la estructura de los conjuntos en cada nivel de tales jerarquías es analizada sistemáticamente.

La primera clase que se estudia es la de los *conjuntos Borel*, que son los que se obtienen a partir de los abiertos de un espacio Polaco dado, mediante las operaciones de complementación y unión numerable. Esta clase puede organizarse en una jerarquía transfinita de longitud ω_1 (el primer ordinal no numerable), pero no entraremos en los detalles de esta estructura en este trabajo.

Más allá de la clase de los conjuntos Borel, tenemos la de los *conjuntos proyectivos*, que son aquellos que se obtienen a partir de los conjuntos Borel mediante las operaciones de proyección (o imagen continua) y complementación. La clase de los conjuntos proyectivos forma una jerarquía de longitud ω (el primer ordinal infinito), que incluye a los *analíticos* (Σ_1^1) (imágenes continuas de Borel) y *co-analíticos* (Σ_1^1) (complementos de analíticos).

Comenzaremos estudiando las propiedades fundamentales de los espacios Polacos e introduciremos algunas herramientas básicas de la teoría. Luego veremos algunos resultados importantes sobre conjuntos Borel, analíticos y co-analíticos, y veremos algunas conexiones con la teoría de la medida que serán aplicadas en el tercer capítulo a la teoría de *NLMP*.

2.2. Espacios Métricos

Repasamos a continuación algunas definiciones y propiedades básicas relacionadas con los espacios métricos, que serán la base de nuestro trabajo con espacios Polacos.

Definición 1. Un **espacio métrico** es un par (X, d) , con un conjunto X y una función $d : X \rightarrow [0, \infty)$ que satisface

- I) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- II) $d(x, y) = d(y, x)$;
- III) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Dicha función se denomina una **métrica** sobre X .

La **bola abierta** con centro x y radio r se define como

$$B(x, r) = B_d(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Las bolas abiertas son base de una topología, denominada la **topología del espacio métrico** y denotada por \mathcal{T}_d .

Para cualquier conjunto $A \subseteq X$, definimos

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

(con $\text{diam}(\emptyset) = 0$, por convención).

Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) se dice **metrizable** si existe una métrica d sobre X tal que \mathcal{T} es la topología de (X, d) . En este caso decimos que la métrica d es **compatible** con \mathcal{T} . Si \mathcal{T} es metrizable con métrica compatible d , entonces la métrica

$$d' := \frac{d}{1 + d}$$

también es compatible y $d' \leq 1$.

Un subconjunto $D \subseteq X$ de un espacio topológico X es **denso** si $D \cap U \neq \emptyset$ para todo abierto no vacío U . Un espacio X que contiene un conjunto denso numerable se denomina **separable**. Recordemos que un espacio topológico se dice **N_2** si tiene una base numerable. Todo espacio N_2 es separable (pero el recíproco no es cierto). Si X es metrizable, entonces X es separable si y sólo si es N_2 , por lo que usaremos estos términos de forma equivalente.

Recordemos que el **producto** de una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de espacios topológicos es el espacio topológico sobre el producto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ con la topología generada por los conjuntos de la forma $\prod_i U_i$, donde U_i es un abierto en X_i para cada i y $U_i = X_i$ para todos salvo una cantidad finita de i . Esta es la menor topología tal que las proyecciones $\pi_j : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$ son continuas. Si $X_i = X$ para todo $i \in I$, denotamos $X^I := \prod_{i \in I} X_i$.

El producto de una sucesión de espacios métricos $\{(X_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es el espacio métrico $(\prod_n X_n, d)$, donde

$$d(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

con $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$. La topología de este espacio métrico es el producto de las topologías de $\{(X_n, d_n)\}$. Por lo tanto el producto de una sucesión de espacios topológicos metrizable es metrizable. Más aún, el producto de una sucesión de espacios metrizable separables es también separable.

2.3. Árboles

El concepto de árbol es una herramienta combinatoria básica en la teoría de conjuntos descriptiva. La noción de árbol empleada en este contexto, es diferente de la usada en teoría de grafos o en teoría de conjuntos combinatoria, aunque están muy relacionadas.

2.3.1. Definiciones Básicas

Definición 2 (Sucesiones finitas). Sea A un conjunto no vacío y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos con A^n al conjunto de todas las sucesiones finitas $s = (s(0), \dots, s(n-1)) = (s_0, \dots, s_{n-1})$ de longitud n (n -**uplas**). Definimos para $n = 0$, $A^0 = \{\emptyset\}$, donde \emptyset denota la **sucesión vacía**. La longitud de una sucesión finita s se denota $\text{long}(s)$, con $\text{long}(\emptyset) = 0$. Si $s \in A^n$ y $m \leq n$, definimos $s|m = (s_0, \dots, s_{m-1})$, con $s|0 = \emptyset$. Si s, t son sucesiones finitas de A , decimos que s es un **segmento inicial** de t y que t es una **extensión** de s (en símbolos, $s \subseteq t$) si $s = t|m$ para algún $m \leq \text{long}(t)$. Por lo tanto $\emptyset \subseteq s$, para cualquier s . Dos sucesiones finitas se dicen **compatibles** si son comparables por el orden parcial \subseteq e **incompatibles** en caso contrario. Usamos $s \perp t$ para indicar que s y t son incompatibles. Por último, sea

$$A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

el conjunto de todas las sucesiones finitas de A . La **concatenación** de $s = (s_i)_{i < n}$, $t = (t_j)_{j < m}$ es la sucesión $s \hat{=} t = (s_0, \dots, s_{n-1}, t_0, \dots, t_{m-1})$. Escribimos $s \hat{=} a$ para denotar $s \hat{=} (a)$, cuando $a \in A$.

Sea $A^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones infinitas $x = \{x(n)\} = \{x_n\}$ de elementos de A . Si $x \in A^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $x|n = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in A^n$. Decimos que $s \in A^n$ es un **segmento inicial** de $x \in A^{\mathbb{N}}$ si $s = x|n$. Escribimos $s \subseteq x$ si s es un segmento inicial de x . También, para $s \in A^{<\mathbb{N}}$, definimos la **concatenación** de s, x como la sucesión infinita $s \hat{=} x = y$, con $y(i) = s(i)$ para $i < \text{long}(s)$ y $y(\text{long}(s)+i) = x(i)$.

Definición 3 (Árbol). Un **árbol** en un conjunto A es un subconjunto $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ cerrado por segmentos iniciales; es decir, si $t \in T$ y $s \subseteq t$, entonces $s \in T$. (En particular, $\emptyset \in T$ si T es no vacío.) Llamamos a los elementos de T los **nodos** de T . Una **rama infinita** de T es una sucesión $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $x|n \in T$, para todo n . El **cuerpo** de T , se denota $[T]$ y es el conjunto de todas las ramas infinitas de T , o sea

$$[T] = \{x \in A^{\mathbb{N}} : \forall n (x|n \in T)\}$$

Finalmente, un árbol se dice **podado** si cada $s \in T$ tiene una extensión propia $t \not\supseteq s, t \in T$. Nótese que un árbol podado está completamente determinado por su cuerpo $[T]$, pues todo nodo es segmento inicial de alguna rama infinita.

2.3.2. Árboles y Conjuntos Cerrados

Cualquier conjunto A puede verse como un espacio topológico con la topología discreta $\mathcal{T} = \mathcal{P}(A)$. Este espacio resulta metrizable con la métrica $\delta(a, b) = 1$, si $a \neq b$. Luego $A^{\mathbb{N}}$, visto como el espacio producto de infinitas copias de A es metrizable con la métrica: $d(x, y) = 2^{-n-1}$ si $x \neq y$ y n es el menor índice con $x_n \neq y_n$.

La **base estándar** para la topología de $A^{\mathbb{N}}$ está formada por los conjuntos

$$N_s = \{x \in A^{\mathbb{N}} : s \subseteq x\},$$

donde $s \in A^{<\mathbb{N}}$. Notemos que $s \subseteq t \Leftrightarrow N_s \supseteq N_t$ y $s \perp t \Leftrightarrow N_s \cap N_t = \emptyset$.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión en $A^{\mathbb{N}}$ y $x \in A^{\mathbb{N}}$, $x_n \rightarrow x$ si y sólo si $\forall i \exists n_i : x_n(i) = x(i)$ para $n \geq n_i$.

Proposición 1. *La función $T \mapsto [T]$ es una biyección entre árboles podados y conjuntos cerrados de $A^{\mathbb{N}}$. Su inversa está dada por*

$$F \mapsto T_F = \{x|n : x \in F, n \in \mathbb{N}\}$$

T_F se denomina el **árbol de F** .

Prueba. Sea T un árbol podado y veamos que $[T]$ es cerrado. Sea x un punto de acumulación de $[T]$. Existe entonces una sucesión $\{x_n\} \subseteq [T]$ con $x_n \rightarrow x$. Luego, para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n|n = x|m$. Deducimos que $\forall m \in \mathbb{N} x|m \in T$, de donde $x \in [T]$.

Es claro que T_A es un árbol podado para todo $A \subseteq A^{\mathbb{N}}$. Además, por lo probado en el párrafo anterior, se puede ver que $[T_A] = \bar{A}$. Luego, para todo F cerrado en $A^{\mathbb{N}}$ resulta $[T_F] = F$, y entonces $T \mapsto [T]$ es una biyección entre árboles podados y cerrados en $A^{\mathbb{N}}$. \square

Definición 4. Sean S, T árboles (sobre conjuntos A, B , resp.). Una función $\varphi : S \rightarrow T$ se dice **monótona** si $s \subseteq t$ implica $\varphi(s) \subseteq \varphi(t)$. A cada φ monótona se le asocia de modo natural una función sobre ramas infinitas con dominio

$$D(\varphi) := \{x \in [S] : \lim_n \text{long}(\varphi(x|n)) = \infty\},$$

y luego, para $x \in D(\varphi)$,

$$\varphi^*(x) = \bigcup_n \varphi(x|n) \in [T]$$

φ se dice **propia** si $D(\varphi) = [S]$, es decir, si φ^* tiene sentido para toda rama infinita.

Si X es un espacio topológico, los conjuntos de la forma $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, con U_n abiertos, se denominan conjuntos G_δ ; y los de la forma $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, con F_n cerrados, se denominan conjuntos F_σ .

Proposición 2. *El conjunto $D(\varphi)$ es G_δ en $[S]$ y $\varphi^* : D(\varphi) \rightarrow [T]$ es continua.*

Prueba. Tenemos $x \in D(\varphi) \Leftrightarrow \forall n \exists m (\text{long}(\varphi(x|m)) \geq n)$, entonces $D(\varphi) = \bigcap_n U_n$, con $U_n = \{x : \exists m (\text{long}(\varphi(x|m)) \geq n)\}$ abierto (porque $y|m = x|m \forall y \in N_{x|m}$).

Para ver que φ^* es continua, notemos que los conjuntos $V_t := [T] \cap N_t$ forman una base de la topología de $[T]$ y $(\varphi^*)^{-1}(V_t) = \bigcup \{N_s \cap D(\varphi) : s \in S, \varphi(s) \supseteq t\}$ es un abierto en $D(\varphi)$. \square

Un conjunto cerrado F en un espacio topológico X es un **retracto** de X si existe una función continua sobreyectiva $f : X \rightarrow F$ tal que $f(x) = x$ para $x \in F$.

Proposición 3. *Sean $F \subseteq H$ dos conjuntos cerrados no vacíos de $A^\mathbb{N}$. Entonces F es un retracto de H .*

Prueba. Sean S, T árboles podados con $[S] = F$ y $[T] = H$. Definiremos una función monótona propia $\varphi : T \rightarrow S$ con $\varphi(s) = s$ para $s \in S$ (nótese que $S \subseteq T$). Por la proposición anterior resultará que F es un retracto de H vía $f = \varphi^*$.

Definimos $\varphi(t)$ por inducción en $\text{long}(t)$. $\varphi(\emptyset) = \emptyset$, y dado $\varphi(t)$, definimos $\varphi(t \hat{a})$ para $a \in A$ y $t \hat{a} \in T$ como sigue: si $t \hat{a} \in S$, sea $\varphi(t \hat{a}) = t \hat{a}$. Si $t \hat{a} \notin S$, sea $\varphi(t \hat{a}) = \varphi(t) \hat{b}$ para cualquier b tal que $\varphi(t) \hat{b} \in S$, que existe ya que S es un árbol podado. \square

2.4. Espacios Polacos

2.4.1. Definiciones y Ejemplos

Sea (X, d) un espacio métrico. Una **sucesión de Cauchy** es una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X tal que $\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$. Decimos que (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy tiene un límite en X .

Para cualquier espacio métrico (X, d) existe un espacio métrico completo (\hat{X}, \hat{d}) tal que (X, d) es un subespacio de (\hat{X}, \hat{d}) y X es denso en \hat{X} . Este espacio es único salvo isometrías y se denomina la **completación** de (X, d) . Claramente, \hat{X} es separable si y sólo si X es separable.

Definición 5. Un espacio topológico X es **completamente metrizable** si admite una métrica compatible d tal que (X, d) es completo. Un espacio completamente metrizable y separable se denomina espacio **Polaco**.

Las siguientes propiedades son fáciles de verificar

Proposición 4. I) *La completación de un espacio métrico separable es un espacio Polaco.*

II) *Todo subespacio cerrado de un espacio Polaco es Polaco.*

III) *El producto de una sucesión numerable de espacios completamente metrizable (resp. Polacos) es completamente metrizable (resp. Polaco). La suma de una familia de espacios completamente metrizable es completamente metrizable. La suma de una sucesión de espacios Polacos es un espacio Polaco.*

Ejemplo 1.

I) El intervalo abierto $(0, 1)$ es Polaco (por ser homeomorfo a \mathbb{R}), a pesar de que su métrica usual no es completa.

II) Cualquier conjunto A con la topología discreta es completamente metrizable, y si A es numerable resulta ser Polaco.

III) El espacio $A^{\mathbb{N}}$, visto como el producto de infinitas copias de A con la topología discreta, es completamente metrizable y si A es numerable, es Polaco. Son de particular importancia los casos $A = 2 = \{0, 1\}$ y $A = \mathbb{N}$, el **espacio de Cantor**:

$$\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$$

y

IV)

$$\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

el **espacio de Baire**.

V) Un ejemplo un poco más sorprendente es $\text{Irr} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el espacio de los irracionales con la topología inducida por \mathbb{R} . Usando el desarrollo en fracciones continuas, el conjunto $\text{Irr} \cap (0, 1)$ resulta homeomorfo a $(\mathbb{N} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$, y entonces Irr es homeomorfo a \mathcal{N} y por lo tanto Polaco.

2.4.2. Extensiones de Funciones Continuas y Homeomorfismos

Sea X un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$, y $f : A \rightarrow Y$. Definimos la **oscilación** de f en $x \in X$ como

$$\text{osc}_f(x) = \inf\{\text{diam}(f(U)) : U \text{ entorno abierto de } x\}$$

(donde se entiende que $f(U) = f(A \cap U)$). Notar que si $x \in A$, entonces f es continua en x si y sólo si $\text{osc}_f(x) = 0$. Definiendo $A_\epsilon = \{x \in X : \text{osc}_f(x) < \epsilon\}$, notemos que A_ϵ es abierto y $\{x : \text{osc}_f(x) = 0\} = \bigcap_n A_{1/n}$ es un conjunto G_δ . Hemos probado entonces la siguiente proposición

Proposición 5. *Sea X un espacio topológico, Y un espacio metrizable, y $f : X \rightarrow Y$. Entonces los puntos de continuidad de f forman un conjunto G_δ .*

Usaremos la siguiente propiedad básica de los espacios metrizables

Proposición 6. *Si X es metrizable, entonces todo cerrado es un G_δ (y por lo tanto todo abierto es un F_σ).*

Prueba. Sea d una métrica compatible con X . Para $x \in X$, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $\epsilon > 0$ definimos la ϵ -bola alrededor de A , $B(A, \epsilon) := \{x : d(x, A) < \epsilon\}$, donde $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$. Como $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ resulta $B(A, \epsilon)$ abierta. Por otro lado, si $\emptyset \neq F \subseteq X$ es cerrado entonces

$$F = \bigcap_n B(F, 1/n)$$

y luego F es un G_δ . □

Usando las ideas anteriores podemos probar el siguiente teorema de extensión

Teorema 7 (Kuratowski). *Sean X metrizable, Y completamente metrizable, $A \subseteq X$, y $f : A \rightarrow Y$ continua. Entonces existe G un conjunto G_δ con $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$ y una extensión continua $g : G \rightarrow Y$ de f .*

Prueba. Sea $G = \overline{A} \cap \{x : \text{osc}_f(x) = 0\}$. Por las proposiciones anteriores G es un G_δ y como f es continua en A , $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$.

Ahora sea $x \in G$. Como $x \in \overline{A}$, existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq A$ con $x_n \rightarrow x$. Luego $\lim_n \text{diam}(f(\{x_n, x_{n+1}, \dots\})) = 0$, y entonces $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy y por lo tanto converge en Y . Sea

$$g(x) := \lim_n f(x_n)$$

Es fácil verificar que g está bien definida (i.e., no depende de la elección de $\{x_n\}$) y extiende a f . Por último, para ver que g es continua en G , tenemos que ver que $\text{osc}_g(x) = 0$ para todo $x \in G$. Si U es abierto en X , entonces $g(U) \subseteq \overline{f(U)}$, de donde se sigue que $\text{diam}(G(U)) \leq \text{diam}(f(U))$, y luego $\text{osc}_g(x) \leq \text{osc}_f(x) = 0$. □

El siguiente teorema caracteriza los subespacios de espacios Polacos que son Polacos (con la topología relativa).

Teorema 8. *Si X es metrizable y $Y \subseteq X$ es completamente metrizable, entonces Y es un G_δ en X . Recíprocamente, si X es completamente metrizable y $Y \subseteq X$ es un G_δ , entonces Y es completamente metrizable. En particular, un subespacio de un Polaco es Polaco si y sólo si es un G_δ .*

Prueba. Para la primera parte, consideremos la identidad $\text{id}_Y : Y \rightarrow Y$. Como es continua, existe un G_δ con $Y \subseteq G \subseteq \bar{Y}$ y una extensión continua $g : G \rightarrow Y$ de id_Y . Como Y es denso en G , $g = \text{id}_G$, y entonces $Y = G$.

Probamos la segunda afirmación. Sea $Y = \bigcap_n U_n$, con U_n abierto en X para todo n . Sea $F_n = X \setminus U_n$. Sea d una métrica completa compatible con X . Definamos una nueva métrica en Y , como sigue

$$d'(x, y) := d(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \min \left\{ 2^{-n}, \left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right| \right\}$$

Para ver que d' es una métrica compatible con la topología de Y , debemos ver que $\mathcal{T}_{d'} = \mathcal{T}_d$. Como $d'(x, y) \geq d(x, y)$, tenemos $B_{d'}(x, r) \subseteq B_d(x, r)$, $\forall x \in Y, r > 0$, y entonces $\mathcal{T}_{d'} \supseteq \mathcal{T}_d$. Veamos ahora que $\mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}_d$. Para ello debemos probar que para toda bola $B_{d'}(x, \epsilon)$ hay una bola $B_d(x, \delta)$ tal que $B_{d'}(x, \epsilon) \supseteq B_d(x, \delta)$. Sea N tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\epsilon}{3}$. Como $\frac{1}{d(x, F_n)}$ es continua en Y para todo n , existen δ_n tales que $d(x, y) < \delta_n \Rightarrow \left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right| < \frac{\epsilon}{3N}$. Luego, tomando $\delta = \min\{\epsilon/3, \delta_1, \dots, \delta_N\}$ tenemos:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(x, y) \leq d(x, y) + \sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right| + \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3} + N \frac{\epsilon}{3N} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Veamos ahora que (Y, d') es completo. Sea $\{y_i\}$ una sucesión de Cauchy en (Y, d') . Entonces es de Cauchy en (X, d) , y $y_i \rightarrow y \in X$. Pero además $\lim_{i,j \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{d(y_i, F_n)} - \frac{1}{d(y_j, F_n)} \right| = 0$ para cada n , y entonces $\left\{ \frac{1}{d(y_i, F_n)} \right\}$ converge en \mathbb{R} y por lo tanto es acotada superiormente. Luego, existe $c_n > 0$ tal que $d(y_i, F_n) > c_n$ para todo i . Como $d(y_i, F_n) \rightarrow d(y, F_n)$, tenemos $d(y, F_n) \neq 0$ para todo n , y entonces $y \notin F_n$ para todo n , es decir, $y \in Y$. Claramente, $y_i \rightarrow y$ en (Y, d') . \square

Ejemplo 2. El teorema anterior se puede usar para dar otra prueba de que Irr es Polaco. Basta notar que como los singuletes $\{x\}$ en un Polaco son cerrados, cualquier conjunto numerable en un Polaco es F_σ . En particular, \mathbb{Q} es un F_σ en \mathbb{R} , de donde Irr es un G_δ y por lo tanto Polaco.

2.4.3. Espacios Polacos Perfectos

Un subconjunto de un espacio Polaco satisface *propiedad del conjunto perfecto* cuando es numerable o contiene un subconjunto perfecto no vacío. Esta es una propiedad de los conjuntos definibles y permite decidir la *Hipótesis del Continuo* para cualquier clase de conjuntos que la satisfagan.

Un **punto límite** en un espacio topológico es un punto que no es aislado, i.e., para todo entorno abierto U de x existe un punto $y \in U$, $y \neq x$ (equivalentemente $\{x\}$ no

es abierto). Un espacio es **perfecto** si todos sus puntos son puntos límite. Si P es un subconjunto de un espacio topológico X , decimos que P es **perfecto en X** si P es cerrado y perfecto con la topología relativa.

Por ejemplo $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \mathbb{I}^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \mathcal{N}$ son perfectos.

Definición 6. Un **esquema de Cantor** sobre un conjunto X es una familia $\{A_s\}_{s \in 2^{<\mathbb{N}}}$ de subconjuntos de X tal que:

- I) $A_{s \frown 0} \cap A_{s \frown 1} = \emptyset$, para $s \in 2^{<\mathbb{N}}$;
- II) $A_{s \frown i} \subseteq A_s$, para $s \in 2^{<\mathbb{N}}, i \in \{0, 1\}$;

Teorema 9. Sea X un espacio Polaco perfecto no vacío. Entonces existe una incrustación de \mathcal{C} en X .

Prueba. Definiremos un esquema de Cantor $\{U_s\}_{s \in 2^{<\mathbb{N}}}$ sobre X tal que

- I) U_s es un abierto no vacío;
- II) $\text{diam}(U_s) \leq 2^{-\text{long}(s)}$;
- III) $\overline{U_{s \frown i}} \subseteq U_s$, para $s \in 2^{<\mathbb{N}}, i \in \{0, 1\}$.

Luego para $x \in \mathcal{C}$, $\bigcap_n U_{x|n} = \bigcap_n \overline{U_{x|n}}$ es un singulete (por ser X completo y T_2), digamos $\{f(x)\}$. Claramente, $f: \mathcal{C} \rightarrow X$ será inyectiva, continua y abierta, y por lo tanto una incrustación.

Definimos U_s por inducción en $\text{long}(s)$. Sea U_\emptyset un conjunto arbitrario que satisfaga I) y II). Dado U_s , definimos $U_{s \frown 0}, U_{s \frown 1}$ eligiendo $x \neq y$ en U_s (lo cual es posible por ser X perfecto) y tomando $U_{s \frown 0}, U_{s \frown 1}$ como bolas abiertas suficientemente pequeñas alrededor de x e y , respectivamente. \square

Nota 1. El resultado anterior es válido para cualquier X completamente metrizable, ya que no hacemos uso de la separabilidad en la demostración.

Corolario 10. Si X es un espacio Polaco perfecto no vacío, entonces $\text{card}(X) = 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, todo espacio Polaco numerable no vacío tiene un punto aislado.

Por el teorema de Cantor-Bendixson (ver [95Kec], p.32), cualquier espacio Polaco no numerable contiene un subconjunto perfecto no vacío y por lo tanto contiene también una copia homeomorfa de \mathcal{C} . En particular, cualquier conjunto G_δ o F_σ no numerable en un Polaco cumple esto y luego tiene cardinalidad 2^{\aleph_0} , i.e., la Hipótesis del Continuo es cierta para esta clase de conjuntos.

2.4.4. Polacos como Imágenes Continuas de \mathcal{N}

Definición 7. Un **esquema de Lusin** sobre un conjunto X es una familia $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ de subconjuntos de X tal que:

- I) $A_{s \hat{\ } i} \cap A_{s \hat{\ } j} = \emptyset$, si $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $i \neq j \in \mathbb{N}$;
- II) $A_{s \hat{\ } i} \subseteq A_s$, para $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$;

Si (X, d) es un espacio métrico y $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es un esquema de Lusin sobre X , decimos que $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es **fino** si $\lim_n \text{diam}(A_{x|n}) = 0$, para todo $x \in \mathcal{N}$. En ese caso si $D = \{x \in \mathcal{N} : \bigcap_n A_{x|n} \neq \emptyset\}$, podemos definir $f : D \rightarrow X$ como $\{f(x)\} = \bigcap_n A_{x|n}$. Llamamos a f la **función asociada** al esquema.

Proposición 11. Sea $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ un esquema de Lusin fino en un espacio métrico (X, d) . Entonces si $f : D \rightarrow X$ es su función asociada, tenemos

- I) f es inyectiva y continua
- II) Si (X, d) es completo y cada A_s es cerrado, entonces D es cerrado.
- III) Si A_s es abierto, entonces f es una incrustación.

Prueba. La parte I) se deduce directamente de la definición de D y de que $\{A_s\}$ sea fino. Para probar II), veamos que si $x_n \in D$, $x_n \rightarrow x$, entonces $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy ya que, dado $\epsilon > 0$, existen un N tal que $\text{diam}(A_{x|n}) < \epsilon$ (por ser $\{A_s\}$ fino) y un M tal que $x_n|N = x|N$ para todo $n \geq M$, por lo que $d(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$ si $n, m \geq M$. Luego, $f(x_n) \rightarrow y \in X$. Como cada A_s es cerrado, $y \in A_{x|n}$ para todo n , por lo que $x \in D$ y $f(x) = y$. Por último, para probar III), basta ver que f es abierta, lo que se sigue de $f(N_s \cap D) = f(D) \cap A_s$. \square

Teorema 12. Sea X un espacio Polaco. Entonces existe un conjunto cerrado $F \subseteq \mathcal{N}$ y una biyección continua $f : F \rightarrow X$. En particular, si X es no vacío, f se extiende a una $g : \mathcal{N} \rightarrow X$ continua y sobreyectiva.

Prueba. La última afirmación se deduce de la primera y de la proposición 3. Para probar la primera parte, fijemos una métrica compatible $d \leq 1$ sobre X . Construiremos un esquema de Lusin $\{F_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ sobre X tal que

- I) $F_\emptyset = X$;
- II) F_s es F_σ ;
- III) $F_s = \bigcup_i F_{s \hat{\ } i} = \bigcup_i \overline{F_{s \hat{\ } i}}$;
- IV) $\text{diam}(F_s) \leq 2^{-\text{long}(s)}$

Sea luego $f : D \rightarrow X$ la función asociada. Por III), $f(D) = X$, y entonces por la proposición 11 f es una biyección continua de D en X . Por lo tanto, es suficiente probar que D es cerrado. Si $x_n \in D$, $x_n \rightarrow x$, entonces, como en la prueba de la proposición 11, $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy, luego $f(x_n) \rightarrow y \in X$ y $y \in \bigcap_n \overline{F_{x|n}} = \bigcap_n F_{x|n}$ (por III), y entonces $x \in D$ y $f(x) = y$.

Para construir $\{F_s\}$ alcanza con probar que dados $F \subseteq X$ un conjunto F_σ y $\epsilon > 0$, podemos escribir $F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, donde los F_i son conjuntos F_σ de diámetro $< \epsilon$ disjuntos dos a dos tales que $\overline{F_i} \subseteq F$. Sea entonces $F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$, con C_i cerrados y $C_i \subseteq C_{i+1}$. Entonces, definiendo $C_0 = \emptyset$, tenemos $F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (C_i \setminus C_{i-1})$. Ahora $C_i \setminus C_{i-1} = C_i \cap C_{i-1}^c$. Como X es separable, y C_{i-1}^c es abierto, podemos escribir $C_{i-1}^c = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j^i$, donde las B_j^i son bolas de diámetro racional $< \epsilon$ centradas en puntos de un denso numerable en X . Definimos ahora $E_j^i = C_i \cap (B_j^i \setminus (\bigcup_{k < j} B_k^i))$. Como todo abierto en un Polaco es F_σ , la diferencia de abiertos es también F_σ y como la intersección de un F_σ y un cerrado es F_σ , los E_j^i son F_σ de diámetro $< \epsilon$ con $C_i \setminus C_{i-1} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j^i$. Luego $F = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} E_j^i$ y $\overline{E_j^i} \subseteq \overline{C_i \setminus C_{i-1}} \subseteq C_i \subseteq F$. \square

2.5. Conjuntos Borel

2.5.1. σ -álgebras y Generadores

Sea X un conjunto. Una familia de subconjuntos de X se dice un **álgebra sobre X** si contiene a \emptyset y es cerrada por complementos y uniones finitas (por la ley de De Morgan resulta también cerrada por intersecciones finitas). Un álgebra se dice una **σ -álgebra** si es además cerrada por uniones numerables.

Dada una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ existe una menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{F} , la llamaremos la **σ -álgebra generada por \mathcal{F}** y la denotaremos $\sigma(\mathcal{F})$. \mathcal{F} se denominará un conjunto de **generadores** de $\sigma(\mathcal{F})$. Una σ -álgebra es **numerablemente generada** si tiene un conjunto de generadores numerable.

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una **π -clase** si es cerrada por intersecciones finitas. \mathcal{F} es una **λ -clase** si es no vacía y cerrada por complementos y uniones disjuntas numerables.

El siguiente teorema nos permitirá probar propiedades de una σ -álgebra limitándonos a trabajar en una π -clase de generadores, que generalmente tendrá una estructura mucho más simple.

Teorema 13 (λ - π de Dynkin). *Sea X un conjunto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una π -clase. Entonces $\sigma(\mathcal{F})$ es la menor λ -clase que contiene a \mathcal{F} .*

Prueba. Sea \mathcal{K} la menor λ -clase que contiene a \mathcal{F} . Probaremos que \mathcal{K} es un álgebra. De aquí se deducirá que es una σ -álgebra, ya que $\bigcup_n A_n = \bigcup_n (A_n \setminus \bigcup_{i < n} A_i)$ y esto último es una unión disjunta.

Sea

$$\mathcal{K}_1 := \{A \subseteq X : A \cap B \in \mathcal{K} \ \forall B \in \mathcal{F}\}$$

Entonces \mathcal{K}_1 es una λ -clase ya que si $A \cap B \in \mathcal{K}$, entonces $A^c \cap B = B \setminus A = (B^c \cup (A \cap B))^c \in \mathcal{K}$; y si $(A_n \cap B) \in \mathcal{K} \ \forall n$, entonces $(\bigcup_n A_n) \cap B = \bigcup_n (A_n \cap B) \in \mathcal{K}$.

Ahora, si $A \in \mathcal{F}$, como \mathcal{F} es π -clase tenemos $A \in \mathcal{K}_1$. Luego $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_1$ y como \mathcal{K} es la menor λ -clase que incluye a \mathcal{F} se tiene $\mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{K}$. Esto implica que si $A \in \mathcal{K}$ y $B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{K}$. Sea ahora

$$\mathcal{K}_2 := \{A \subseteq X : A \cap B \in \mathcal{K} \ \forall B \in \mathcal{K}\}$$

Por la misma demostración dada para \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 es una λ -clase y contiene a \mathcal{F} por lo dicho en el párrafo anterior. Como antes, esto implica $\mathcal{K}_2 \supseteq \mathcal{K}$. Luego, hemos probado que \mathcal{K} es cerrada por intersecciones finitas. Como es cerrada por complementos, resulta que \mathcal{K} es un álgebra.

Como $\sigma(\mathcal{F})$ es la menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{F} resulta $\mathcal{K} \supseteq \sigma(\mathcal{F})$. Pero toda σ -álgebra es una λ -clase y entonces $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{K}$. \square

2.5.2. Espacios y Funciones Medibles

Un **espacio medible** (o **Borel**) es un par (X, Σ) , donde X es un conjunto y Σ es una σ -álgebra sobre X . Los conjuntos en Σ se denominan **conjuntos medibles**.

Un **subespacio** de (X, Σ) es un subconjunto $Y \subseteq X$ junto con la **σ -álgebra relativa** $\Sigma|Y = \{A \cap Y : A \in \Sigma\}$. Notemos que si $\Sigma = \sigma(\mathcal{E})$, entonces $\Sigma|Y = \sigma(\mathcal{E}|Y)$.

Sean $(X, \Sigma), (Y, \Omega)$ espacios medibles. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice **medible** si $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para todo $A \in \Omega$. Si \mathcal{E} genera Ω , alcanza con que esto se cumpla para $A \in \mathcal{E}$, ya que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ (donde $f^{-1}(\mathcal{D}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{D}\}$ para $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(Y)$).

Un **isomorfismo (medible)** entre X e Y es una biyección $f : X \rightarrow Y$ tal que f y f^{-1} son medibles. Si existe tal isomorfismo, decimos que X e Y son **isomorfos (mediblemente)**. Una **incrustación (medible)** de X en Y es un isomorfismo entre X y un subespacio de Y .

Si X es un conjunto, $\{(Y_i, \Sigma_i)\}_{i \in I}$ es una familia de espacios medibles y $f_i : X \rightarrow Y_i$ son funciones, existe una menor σ -álgebra Σ sobre X tal que todas las f_i resultan medibles. La llamamos la **σ -álgebra generada por $\{f_i\}$** . Si \mathcal{E}_i es un conjunto de generadores para Σ_i , entonces $\{f_i^{-1}(A) : A \subseteq Y_i, A \in \mathcal{E}_i, i \in I\}$ genera Σ .

Sea $\{(X_i, \Sigma_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios medibles. El **espacio medible producto** $(\prod_i X_i, \prod_i \Sigma_i)$ es el espacio generado por las proyecciones $\pi_{X_j} = \pi_j : \prod_i X_i \rightarrow X_j, j \in I, \pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$. Equivalentemente, es el espacio generado por los conjuntos de la forma $\prod_i A_i$, donde $A_i \in \Sigma_i$ y $A_i = X_i$ salvo para a lo sumo un i (o equivalentemente, salvo para una cantidad finita de i). Si \mathcal{E}_i es un conjunto de generadores de Σ_i , entonces los conjuntos de la forma $\prod_i A_i$, donde $A_i = X_i$ salvo para a lo sumo un i tal que $A_i \in \mathcal{E}_i$, forman un conjunto de generadores del espacio producto.

La **suma** $(\bigoplus X_i, \bigoplus \Sigma_i)$ de una familia de espacios medibles $\{(X_i, \Sigma_i)\}_{i \in I}$ se define (salvo isomorfismo) como sigue: Reemplazando cada X_i por una copia isomorfa, podemos asumir que los X_i son disjuntos dos a dos. Sea $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Un conjunto $A \subseteq X$ es medible si y sólo si $A \cap X_i$ es medible para cada $i \in I$.

2.5.3. Conjuntos y Funciones Borel

Conjuntos Borel en Espacios Topológicos

Sea X un espacio topológico. La clase de los **conjuntos borelianos** (o **conjuntos Borel**) de X es la σ -álgebra generada por los abiertos de X y la denotamos $\mathbf{B}(X)$. A $(X, \mathbf{B}(X))$ lo llamamos el **espacio Borel** de X .

Si \mathcal{E} es una sub-base numerable de X , entonces claramente $\mathbf{B}(X) = \sigma(\mathcal{E})$, por lo que $\mathbf{B}(X)$ es numerablemente generada si X es N_2 . Notemos también que si Y es un subespacio de X entonces $(Y, \mathbf{B}(Y))$ es un subespacio de $(X, \mathbf{B}(X))$ (i.e., $\mathbf{B}(Y) = \mathbf{B}(X)|_Y$). Es obvio que $\mathbf{B}(X)$ contiene todos los abiertos y cerrados, y los subconjuntos F_σ y G_δ de X .

Si (X, Σ) es un espacio medible e Y es un espacio topológico, diremos que $f : X \rightarrow Y$ es **medible** si es medible respecto de $(X, \Sigma), (Y, \mathbf{B}(Y))$. Si Y tiene una sub-base numerable $\{V_n\}$ es suficiente pedir que $f^{-1}(V_n) \in \Sigma$ para cada n .

Ejemplo 3. Un número x en el intervalo $(0, 1)$ es **normal (en base 2)** si su desarrollo binario $x = 0.b_1b_2b_3\dots$ satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{i \leq n : b_i = 1\}|}{n} = \frac{1}{2}$$

Sea N el conjunto de los números normales. Veamos que es Borel. A tal fin, sea d_n la función “ n -ésimo dígito” en $(0, 1)$. Luego $x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x)/2^n$. Sea \mathbb{Q}^+ el conjunto de los racionales positivos. Entonces para $x \in (0, 1)$ tenemos:

$$x \in N \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+ \exists n \forall m \geq n \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^m d_i(x)}{m} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon \right)$$

Ahora, $\sum_{i=1}^m d_i(x)$ es constante en cada intervalo de la forma $(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$, y entonces el conjunto $A_{m,\epsilon} := \{x : |(\sum_{i=1}^m d_i(x))/m - 1/2| < \epsilon\}$ es una unión finita de tales intervalos. Como

$$N = \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} A_{m,\epsilon}$$

se sigue que N es Borel en $(0, 1)$.

Nota 2. Puede observarse en el ejemplo anterior que existe un claro paralelismo entre las operaciones conjuntistas y los conectivos y cuantificadores lógicos. Un conjunto A puede pensarse como una proposición (propiedad) que es satisfecha sólo por los elementos que

le pertenecen, escribiendo $A(x)$ sii $x \in A$. Partiendo de esta noción básica tenemos, por ejemplo, $(A \cup B)(x) \equiv A(x) \vee B(x)$. Del mismo modo, podemos asociar \cap y c con \wedge y \neg respectivamente. Intersecciones y uniones infinitas también pueden traducirse a expresiones lógicas cuantificadas (e.g., $(\bigcap_n A_n)(x) \equiv (\forall n A_n(x))$).

En vista de estas correspondencias, es usual emplear notación lógica para evaluar la complejidad descriptiva de conjuntos o funciones. Para ver que un conjunto es Borel será suficiente mostrar una definición de éste que contenga solamente otros conjuntos Borel conocidos y \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow (notar que estos dos últimos pueden escribirse en términos de \neg y \vee), $\exists n$, $\forall n$ (con n variando sobre un conjunto numerable de índices). Esta aplicación de la notación lógica a la teoría descriptiva de conjuntos se suele denominar el *algoritmo de Tarski-Kuratowski*.

Funciones Borel

Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice **Borel (medible)** si $f^{-1}(A) \in \mathbf{B}(Y)$ para todo $A \in \mathbf{B}(Y)$. Si Y tiene una sub-base numerable $\{V_n\}$ es suficiente pedir que $f^{-1}(V_n)$ sea Borel para cada n . f es un **isomorfismo Borel** si es biyectiva y f, f^{-1} son funciones Borel, i.e., para $A \subseteq X$, $A \in \mathbf{B}(X) \Leftrightarrow f(A) \in \mathbf{B}(Y)$. Si $X = Y$, f se denomina un **automorfismo Borel**.

Existe un conexión básica entre la medibilidad de una función y la medibilidad de su gráfico

Proposición 14. Sean (X, Σ) un espacio medible, Y un espacio metrizable separable, y $f : X \rightarrow Y$ una función medible. Entonces $\text{graf}(f) \subseteq X \times Y$ también es medible (respecto de $\Sigma \times \mathbf{B}(Y)$).

Prueba. Si $\{V_n\}$ es una base numerable de Y , tenemos

$$f(x) = y \Leftrightarrow \forall n (y \in V_n \Rightarrow f(x) \in V_n) \Leftrightarrow \forall n (y \notin V_n \vee f(x) \in V_n)$$

de donde $\text{graf}(f) = \bigcap_n (X \times V_n^c \cup f^{-1}(V_n) \times Y)$ es medible. \square

2.5.4. Espacios Borel Estándar

Definición 8. Un espacio medible (X, Σ) es un **espacio Borel estándar** si es isomorfo a $(Y, \mathbf{B}(Y))$ para algún espacio Polaco Y o equivalentemente, si existe una topología Polaca \mathcal{T} en X con $\Sigma = \mathbf{B}(\mathcal{T})$.

Conjuntos Borel como Conjuntos Clopen

Llamaremos **clopen** a los subconjuntos de un espacio topológico que sean cerrados y abiertos. La siguiente es una propiedad fundamental de los conjuntos Borel en un espacio Polaco

Teorema 15. *Sea (X, \mathcal{T}) un espacio Polaco y $A \subseteq X$ un conjunto Borel. Entonces existe una topología Polaca $\mathcal{T}_a \supseteq \mathcal{T}$ tal que $\mathbf{B}(\mathcal{T}_a) = \mathbf{B}(\mathcal{T})$ y A es clopen en \mathcal{T}_a .*

Prueba. Necesitamos los siguientes dos lemas

Lema 16. *Sea (X, \mathcal{T}) un espacio Polaco y $F \subseteq X$ cerrado. Sea \mathcal{T}_F la topología generada por $\mathcal{T} \cup F$, i.e., la topología con base $\mathcal{T} \cup \{U \cap F : U \in \mathcal{T}\}$. Entonces \mathcal{T}_F es Polaca, F es clopen en \mathcal{T}_F , y $\mathbf{B}(\mathcal{T}_F) = \mathbf{B}(\mathcal{T})$.*

Prueba. Notar que \mathcal{T}_F es la suma directa de las topologías relativas sobre F y F^c . Como todo cerrado en un Polaco es G_δ (proposición 6) entonces, por el teorema 8, \mathcal{T}_F es Polaca. \square

Lema 17. *Sea (X, \mathcal{T}) un espacio Polaco y sea $\{\mathcal{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de topologías Polacas sobre X con $\mathcal{T}_n \supseteq \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces la topología \mathcal{T}_∞ generada por $\bigcup_n \mathcal{T}_n$ es Polaca. Además, si $\mathcal{T}_n \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{T})$, entonces $\mathbf{B}(\mathcal{T}_\infty) = \mathbf{B}(\mathcal{T})$.*

Prueba. Sea $X_n = X$ para $n \in \mathbb{N}$. Definamos la función $\varphi : (X, \mathcal{T}_\infty) \rightarrow \prod_n X_n$ dada por $\varphi(x) = (x, x, \dots)$. Probamos primero que φ es una incrustación. Los conjuntos de la forma $\pi_n^{-1}(U) \cap \varphi(X)$ con $U \in \mathcal{T}_n$ son base de la topología restringida a $\varphi(X)$, y $\bigcup_n \mathcal{T}_n$ es base de \mathcal{T}_∞ . Ahora, para $U \in \mathcal{T}_n$ se tiene $\varphi(U) = \pi_n^{-1}(U) \cap \varphi(X)$ y entonces φ abierta y continua.

$\varphi^{-1}(\pi_n^{-1}(U)) = U \in \mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_\infty$, entonces $\varphi : (X, \mathcal{T}_\infty) \rightarrow \varphi(X)$ es continua. A su vez, $\bigcup_n \mathcal{T}_n$ es base de \mathcal{T}_∞ y si $V \in \mathcal{T}_n$, entonces $\varphi(V) = \pi_n^{-1}(V) \cap \varphi(X)$, de donde φ es abierta.

Veamos ahora que $\varphi(X)$ es cerrado en $\prod_n (X_n, \mathcal{T}_n)$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin \varphi(X)$, entonces existen índices $i < j$ tales que $x_i \neq x_j$. Sean U, V abiertos disjuntos en \mathcal{T} (por lo tanto abiertos también en $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j$ resp.) tales que $x_i \in U, x_j \in V$. Entonces

$$(x_n) \in X_0 \times \dots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \dots \times X_{j-1} \times V \times X_{j+1} \times \dots \subseteq \varphi(X)^c$$

Luego, por la proposición 4, $\varphi(X)$ es Polaco. Pero φ es un homeomorfismo de (X, \mathcal{T}_∞) en $\varphi(X)$, y entonces (X, \mathcal{T}_∞) es Polaco.

Si $\mathcal{T}_n \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{T})$ y $\{U_i^n\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base de \mathcal{T}_n , entonces $\{U_i^n\}_{i, n \in \mathbb{N}}$ es una sub-base de \mathcal{T}_∞ , y entonces $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{T})$. \square

Consideremos ahora la clase \mathcal{S} de los subconjuntos A de X para los cuales existe una topología Polaca $\mathcal{T}_A \supseteq \mathcal{T}$ con $\mathbf{B}(\mathcal{T}_A) = \mathbf{B}(\mathcal{T})$ y A clopen en \mathcal{T}_A . Para ver que $\mathbf{B}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{S}$ basta ver que $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ y que \mathcal{S} es una σ -álgebra. Lo primero se sigue del lema 16. Claramente, \mathcal{S} es cerrada por complementos. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$. Sea $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{A_n}$ una topología que satisfaga las condiciones de arriba. Sea \mathcal{T}_∞ como en el lema 17. Entonces $A = \bigcup_n A_n$ es abierto en \mathcal{T}_∞ , y nuevamente por el lema 16 hay una topología $\mathcal{T}_A \supseteq \mathcal{T}_\infty$ ($\supseteq \mathcal{T}$) tal que $\mathbf{B}(\mathcal{T}_A) = \mathbf{B}(\mathcal{T}_\infty) (= \mathbf{B}(\mathcal{T}))$ con A clopen en $\mathbf{B}(\mathcal{T}_A)$, luego $A \in \mathcal{S}$. \square

2.5.5. Borel como Imágenes de \mathcal{N}

La siguiente es una representación muy útil de los conjuntos Borel en un espacio Polaco

Teorema 18 (Lusin-Souslin). *Sea X un espacio Polaco y $A \subseteq X$ Borel. Entonces existe un conjunto cerrado $F \subseteq \mathcal{N}$ y una biyección continua $f : F \rightarrow A$. En particular, si $A \neq \emptyset$, f se extiende a una $g : \mathcal{N} \rightarrow A$ continua y sobreyectiva.*

Prueba. Extendamos la topología \mathcal{T} de X a una topología Polaca \mathcal{T}_A en la que A sea clopen, y por ende Polaco. Por el teorema 12, existe un cerrado $F \subseteq \mathcal{N}$ y una biyección $f : F \rightarrow A$ continua con la topología $\mathcal{T}_A|_A$. Como $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A$, $f : F \rightarrow A$ es también continua con \mathcal{T} . La última afirmación se deduce de la proposición 3. \square

2.6. Conjuntos Analíticos y el Teorema de Separación

Definición 9. Sea X un espacio Polaco. Un conjunto $A \subseteq X$ se dice **analítico** si existen un espacio Polaco Y y una función continua $f : Y \rightarrow X$ con $f(Y) = A$. (El conjunto vacío es analítico, tomando $Y = \emptyset$.)

Por el teorema 12, si $A \neq \emptyset$ podemos tomar $Y = \mathcal{N}$ en esta definición. La clase de conjuntos analíticos en X se denota $\Sigma_1^1(X)$.

Se sigue del teorema 18 que $\mathbf{B}(X) \subseteq \Sigma_1^1(X)$.

Proposición 19. I) *Si X es Polaco y $A_n \subseteq X$ son analíticos, entonces $\bigcup_n A_n, \bigcap_n A_n$ son analíticos.*

II) *Si X, Y son Polacos y $f : X \rightarrow Y$ es Borel, entonces si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ son analíticos, $f(A), f^{-1}(B)$ son analíticos.*

Prueba. I) Sean Y_n espacios polacos y $f_n : Y_n \rightarrow X$ funciones continuas con $f_n(Y_n) = A_n$. Podemos asumir que los espacios Y_n son disjuntos y entonces $f = \bigcup_n f_n$ es una función continua que mapea a la suma directa $\bigoplus_n Y_n$ sobre $\bigcup_n A_n$, por lo que $\bigcup_n A_n$ es analítico.

Sea ahora $Z = \{(y_n) \in \prod_n Y_n : f_n(y_n) = f_m(y_m), \forall n, m\}$. Entonces Z es cerrado en $\prod_n Y_n$, y por ende es un Polaco. Si $f : Z \rightarrow X$ se define como $f((y_n)) = f_1(y_1)$, f es continua y $f(Z) = \bigcap_n A_n$, luego $\bigcap_n A_n$ es analítico.

II) Sea $F = \{(x, y) \in X \times Y : x \in A \wedge f(x) = y\}$. Entonces es claro que $f(A) = \pi_Y(F)$. Como la proyección es continua y la imagen continua de un analítico es analítica, es suficiente probar que F es analítico. Por la proposición 14, $\{(x, y) : f(x) = y\}$ es Borel, por lo que sólo resta probar que $\{(x, y) : x \in A\} = A \times Y$ es $\Sigma_1^1(X \times Y)$. Sea

Z Polaco y $g : Z \rightarrow X$ continua con $g(Z) = A$. Entonces $g^* : Z \times Y \rightarrow X \times Y$ dada por $g^*(z, y) = (g(z), y)$ es continua y $g^*(Y \times Z) = Y \times A$.

Por último, notemos que $f^{-1}(B) = \pi_X(\{(x, y) \in X \times Y : y \in B \wedge f(x) = y\})$, y luego se puede ver que $f^{-1}(B)$ es analítico con una prueba análoga a la de $f(A)$. \square

Definición 10. Si X es un espacio Borel estándar y $A \subseteq X$, decimos que A es **analítico** si existe un espacio Polaco Y y un isomorfismo Borel $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A)$ es analítico en Y . (Por la proposición anterior esto no depende de la elección de Y, f). Usamos también la notación $\Sigma_1^1(X)$ para la clase de los subconjuntos analíticos de X .

Un conjunto $A \subseteq X$ en un espacio Polaco X se dice **co-analítico** si A^c es analítico. La clase de los conjuntos co-analíticos de X se denota $\Pi_1^1(X)$. Los conjuntos **bianalíticos** son aquellos que son analíticos y co-analíticos. Las mismas definiciones se aplican cuando X es un espacio Borel estándar.

Teorema 20 (Teorema de Separación de Lusin). *Sea X un espacio Borel estándar y sean $A, B \subseteq X$ dos conjuntos analíticos disjuntos. Entonces existe un conjunto Borel $C \subseteq X$ que separa a A de B , i.e., $A \subseteq C$ y $C \cap B = \emptyset$.*

Prueba. Podemos asumir que X es Polaco. Diremos que dos subconjuntos $P, Q \subseteq X$ son **separables por Borel** si existe un conjunto Borel R que separa a P de Q .

Lema 21. *Si $P = \bigcup_m P_m$, $Q = \bigcup_n Q_n$, y P_m, Q_n son separables por Borel para cada m y n , entonces P, Q son separables por Borel.*

Prueba. Si $R_{m,n}$ separa a P_m de Q_n , entonces $\bigcup_m \bigcap_n R_{m,n}$ separa a P de Q . \square

Si alguno de los dos conjuntos es vacío el resultado se cumple trivialmente. Ahora, asumiendo A, B no vacíos, sean $f : \mathcal{N} \rightarrow A$, $g : \mathcal{N} \rightarrow B$ funciones continuas sobreyectivas. Definamos $A_s := f(N_s)$, $B_s := g(N_s)$. Entonces $A_s = \bigcup_m A_{s \hat{\ } m}$, $B_s = \bigcup_m B_{s \hat{\ } m}$. Supongamos ahora A, B no separables. Entonces, aplicando repetidamente el lema 21 podemos definir recursivamente $x(n), y(n) \in \mathbb{N}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_{x|n}, B_{y|n}$ no son separables por Borel.

Luego $f(x) \in A$, $g(y) \in B$ y entonces $f(x) \neq g(y)$. Sean U, V abiertos disjuntos con $f(x) \in U$, $g(y) \in V$. Por la continuidad de f y g , para n suficientemente grande tenemos $f(N_{x|n}) \subseteq U$, $g(N_{y|n}) \subseteq V$, pero entonces U separa a $A_{x|n}$ de $B_{y|n}$, absurdo. \square

Corolario 22 (Teorema de Souslin). *Si X es un espacio Borel estándar, entonces todo conjunto bianalítico $A \subseteq X$ es Borel.*

Prueba. Tomar $B = A^c$ en el teorema 20. \square

Los siguientes dos teoremas se deducen de este corolario y nos permitirán más adelante probar resultados fundamentales para la teoría de NLMP, sobre medibilidad de conjuntos definibles y coincidencia de medidas respectivamente.

Teorema 23 (Lusin-Novikov). *Sean X, Y espacios Borel estándar y $P \subseteq X \times Y$ un conjunto Borel. Si para cada $x \in X$ la **sección** $P_x := \{y \in Y : (x, y) \in P\}$ es numerable, entonces $\pi_X(P)$ es Borel.*

Prueba. Usaremos el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [95Kec] (p.123, 125-127; teorema 18.11).

Teorema 24 (El conjunto de unicidad de un conjunto Borel). *Sean X, Y espacios Borel estándar y $R \subseteq X \times Y$ un conjunto Borel. Entonces*

$$\{x \in X : \exists! y(x, y) \in R\}$$

es Π_1^1 .

Podemos asumir X e Y Polacos. Por el teorema 18, existen $F \subseteq \mathcal{N}$ cerrado y $f : F \rightarrow X \times Y$ continua e inyectiva con $f(F) = P$. Definamos $Q \subseteq X \times \mathcal{N}$ por $Q := \{(\pi_X(f(z)), z) : z \in F\}$. Entonces Q es cerrado (por ser $\pi_X \circ f$ continua), cada sección Q_x es numerable, y $\pi_X(P) = \pi_X(Q)$. Por lo tanto, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que P es cerrado.

Como P_x es cerrado es un Polaco (por la proposición 4). Como además es numerable, por el corolario 10 debe tener un punto aislado. Si $\{U_n\}$ es una base de abiertos de Y y definimos

$$A_n := \{x : \exists! y((x, y) \in P \wedge y \in U_n)\}$$

entonces, por el teorema 24, A_n es Π_1^1 y por nuestra observación anterior $\pi_X(P) = \bigcup_n A_n$. Como los conjuntos Π_1^1 son cerrados por uniones numerables, P resulta ser Π_1^1 y como claramente es Σ_1^1 , es Borel, por el teorema de Souslin. \square

Si R es una relación sobre un conjunto S , diremos que $Q \subset S$ es **R -cerrado** si

$$\forall s \in Q, t \in S, sRt \Rightarrow t \in Q$$

Teorema 25 (Blackwell). *Sea X un espacio Borel estándar y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos Borel en X . Consideremos la relación de equivalencia*

$$x \approx y \Leftrightarrow (\forall n \ x \in A_n \Leftrightarrow y \in A_n)$$

Sea $B_{\approx} = \{A \in \mathbf{B}(X) : A \approx\text{-cerrado}\}$. Entonces $B_{\approx} = \sigma(\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}})$

Prueba. Sea $\Sigma = \sigma(\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Es fácil ver que $B_{\approx} \supseteq \{A_n\}$ y que es una σ -álgebra, por lo que $B_{\approx} \supseteq \Sigma$.

Sea $f : X \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ dada por $f(x)_n = 1 \Leftrightarrow x \in A_n$. Ahora como $f^{-1}(\pi_n^{-1}(\{1\})) = A_n$ y los $\pi_n^{-1}(\{1\})$ son una base de $\mathbf{B}(2^{\mathbb{N}})$, f resulta $(\Sigma, \mathbf{B}(2^{\mathbb{N}}))$ -medible.

Si $A \in B_{\approx}$ entonces por 14.6 $f(A)$ y $f(A^c)$ son analíticos disjuntos y además $f(A) \cup f(A^c) = 2^{\mathbb{N}}$. Luego $f(A)$ es bianalítico y por el teorema 22, es Borel.

Como f es una función Borel, se tiene $A = f^{-1}(f(A)) \in \Sigma$. Luego, $B_{\approx} \subseteq \Sigma$. \square

2.7. Teoría de la Medida

2.7.1. Probabilidades y Subprobabilidades

Una **medida finita** sobre un espacio medible (X, Σ) es una función $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$, y para toda sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ de conjuntos disjuntos dos a dos se cumple $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

μ se dice una **medida de subprobabilidad** si $\mu(X) \leq 1$, y es una **medida de probabilidad** si $\mu(X) = 1$.

Ejemplo 4. La *medida de Lebesgue* $m_{[0,1]}$ (ver [70Rud], p.300) es una medida de probabilidad sobre $([0, 1], \mathcal{M})$, donde \mathcal{M} es la σ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue e incluye a los conjuntos Borel, por lo que su restricción también es una medida de probabilidad sobre $([0, 1], \mathbf{B}([0, 1]))$.

Denotaremos al conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre (X, Σ) con $\mathbf{P}(X, \Sigma)$ (ó $\mathbf{P}(X)$), y al de las medidas de subprobabilidad con $\mathbf{M}(X, \Sigma)$ (ó $\mathbf{M}(X)$). Fijado $Q \in \Sigma$, definimos sobre $\mathbf{M}(X, \Sigma)$ la función **medida en** Q , $M_Q : \mathbf{M}(X) \rightarrow [0, \infty)$, como $M_Q(\mu) = \mu(Q)$.

Definición 11 (Espacio de Medidas de Subprobabilidad). La definición anterior nos permite dotar al conjunto $\mathbf{M}(X)$ de una estructura de espacio medible, definiendo $\Sigma_{\mathbf{M}(X)}$ como la σ -álgebra generada por $\{M_Q\}_{Q \in \Sigma}$. Se ve entonces que

$$\Sigma_{\mathbf{M}(X)} = \sigma(\{M_Q^{-1}(A) : Q \in \Sigma, A \in \mathbf{B}(\mathbb{R})\}) = \sigma(\{M_Q^{-1}((a, b)) : Q \in \Sigma, a, b \in \mathbb{R}\})$$

$\mathbf{P}(X)$ puede verse como un subespacio medible de $\mathbf{M}(X)$, con $\Sigma_{\mathbf{P}(X)} := \Sigma_{\mathbf{M}(X)}|_{\mathbf{P}(X)} = \sigma(\{(M_Q|_{\mathbf{P}(X)})^{-1}((a, b)) : Q \in \Sigma, a, b \in \mathbb{R}\})$. Por abuso de notación, escribiremos simplemente M_Q en lugar de $M_Q|_{\mathbf{P}(X)}$ cuando no dé lugar a confusión.

En [95Kec](pp.112, 113; teoremas 17.23 y 17.24) se prueba el siguiente resultado

Teorema 26. *Si X es un espacio Borel estándar, entonces $(\mathbf{P}(X), \Sigma_{\mathbf{P}(X)})$ es un espacio Borel estándar, con $\Sigma_{\mathbf{P}(X)} = \mathbf{B}(\mathcal{T})$, donde \mathcal{T} es la topología generada por las funciones $\mu \mapsto \int f d\mu$, con f que varía sobre las funciones Borel acotadas de X en \mathbb{R} .*

Usando este teorema podemos probar lo siguiente:

Teorema 27. *Si X es un espacio Borel estándar, entonces $M(X)$ es un espacio Borel estándar.*

Prueba. Sea $x^* \notin X$ y consideremos el espacio medible $X^* := X \oplus \{x^*\}$. Es fácil ver que X^* es también Borel estándar. Consideremos la biyección $\mu \in M(X) \mapsto \bar{\mu} = f(\mu) \in P(X^*)$, donde $\bar{\mu}$ es la única medida de probabilidad en X^* tal que

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(Q) &= \mu(Q), \quad \forall Q \in \mathbf{B}(X) \\ \bar{\mu}(\{x^*\}) &= 1 - \mu(X)\end{aligned}$$

Probemos que es un isomorfismo Borel. Como $\Sigma_{M(X)}$ es generada por $\mathcal{E} := \{M_Q^{-1}((a, b)) : Q \in \mathbf{B}(X), a, b \in \mathbb{R}\}$ y $\Sigma_{P(X^*)}$ es generada por $\mathcal{E}^* := \{M_Q^{-1}((a, b)) : Q \in \mathbf{B}(X^*), a, b \in \mathbb{R}\}$, basta con ver que $\{f(A) : A \in \mathcal{E}\} \subseteq \mathcal{E}^*$ y $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}^*\} \subseteq \mathcal{E}$.

Si $Q \in \mathbf{B}(X)$, entonces $\bar{\mu}(Q) = \mu(Q)$ y luego para todo $A = M_Q^{-1}((a, b)) \in \mathcal{E}$ se da $f(M_Q^{-1}((a, b))) = M_Q^{-1}((a, b)) \in \mathcal{E}^*$.

Por la observación anterior, si $B = M_Q^{-1}((a, b)) \in \mathcal{E}^*$ entonces $f^{-1}(M_Q^{-1}((a, b))) = M_Q^{-1}((a, b)) \in \mathcal{E}$. Por otra parte, tenemos

$$\bar{\mu}(Q \cup \{x^*\}) = \mu(Q) + (1 - \mu(X)) = 1 - \mu(Q^c)$$

por lo que se cumple

$$\bar{\mu}(Q \cup \{x^*\}) \in (a, b) \Leftrightarrow \mu(Q^c) \in (1 - b, 1 - a)$$

y entonces, para $B = M_{Q \cup \{x^*\}}^{-1}((a, b)) \in \mathcal{E}^*$ se tiene

$$f^{-1}(M_{Q \cup \{x^*\}}^{-1}((a, b))) = M_{Q^c}^{-1}((1 - b, 1 - a)) \in \mathcal{E}.$$

Luego $M(X)$ es isomorfo a $P(X^*)$ y este último es Borel estándar por el teorema 26. \square

2.7.2. Lemas de Coincidencia

Los siguientes dos lemas serán fundamentales, junto con el teorema 25, para probar nuestros resultados de caracterización lógica de la bisimulación.

Lema 28 (Imitación dos a uno). *Sean (X, Σ) un espacio medible, $\Gamma \subseteq \Sigma$ un álgebra, μ, μ_1, μ_2 medidas de subprobabilidad en (X, Σ) tales que*

$$\forall B \in \Gamma : \mu(B) = \mu_1(B) \vee \mu(B) = \mu_2(B)$$

y definamos Γ_1 y Γ_2 como

$$\Gamma_k := \{B \in \Gamma : \mu(B) = \mu_k(B)\}$$

entonces $\Gamma = \Gamma_1$ ó $\Gamma = \Gamma_2$. Es decir, si hay dos medidas tales que en cada conjunto de Γ alguna coincide con μ , entonces necesariamente una de estas dos medidas coincide con μ en todos los conjuntos de Γ .

Prueba. Supongamos $\Gamma_1 \neq \Gamma$ y $\Gamma_2 \neq \Gamma$ y tomemos $Q_1 \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ y $Q_2 \in \Gamma \setminus \Gamma_2$. Como $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, tenemos que $A \in \Gamma_2$ y $B \in \Gamma_1$. Ahora, si A y B son conjuntos medibles disjuntos, por aditividad se tiene

$$\mu(A \cup B) = \mu_k(A \cup B) \Leftrightarrow \mu(A) + \mu(B) = \mu_k(A) + \mu_k(B) \quad (2.1)$$

de donde se sigue que si dos de los conjuntos $\{A, B, A \cup B\}$ están en Γ_k entonces el tercero también está. Dado que $Q_1 \cap Q_2 \in \Gamma$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $Q_1 \cap Q_2 \in \Gamma_1$. Aplicando (2.1) a $Q_2 = (Q_1 \cap Q_2) \cup (Q_2 \setminus Q_1)$ obtenemos $Q_2 \setminus Q_1 \in \Gamma_1$. Ahora, no puede ser $Q_1 \cup Q_2 \in \Gamma_1$, porque (2.1) sobre $Q_1 \cup Q_2 = Q_1 \cup (Q_2 \setminus Q_1)$ implicaría $Q_1 \in \Gamma_1$. Debe ser entonces $Q_1 \cup Q_2 \in \Gamma_2$.

Por otra parte, $Q_1 \setminus Q_2 \notin \Gamma_2$ porque de lo contrario, por (2.1) sobre $Q_1 \cup Q_2 = Q_2 \cup (Q_1 \setminus Q_2)$, se obtendría $Q_2 \in \Gamma_2$.

Tenemos entonces $Q_1 \setminus Q_2, Q_1 \cap Q_2 \in \Gamma_1$, y por (2.1) resulta $Q_1 = (Q_1 \setminus Q_2) \cup (Q_1 \cap Q_2) \in \Gamma_1$, contradicción. \square

Lema 29. Sea X un conjunto y \mathcal{F} una π -clase sobre X tal que $X \in \mathcal{F}$. Sean μ_1, μ_2 medidas finitas sobre $\sigma(\mathcal{F})$. Si μ_1 y μ_2 coinciden sobre \mathcal{F} entonces coinciden sobre $\sigma(\mathcal{F})$.

Prueba. Sea $\mathcal{K} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Como $\mu_1(X) = \mu_2(X)$ y $\mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A)$, \mathcal{K} es cerrada por complementos, y por la aditividad numerable de las medidas es también cerrada por uniones disjuntas numerables. Luego \mathcal{K} es una λ -clase que contiene a \mathcal{F} y por el teorema 13 concluimos $\mathcal{K} = \sigma(\mathcal{F})$. \square

Capítulo 3

Aplicación a Procesos de Markov Etiquetados

3.1. Introducción

Los procesos de Markov con espacios de estados continuos o evolución continua del tiempo (o ambos) aparecen de manera natural en varias áreas de la física, la biología, la economía o la computación. Ejemplos de sistemas de este tipo son el movimiento browniano, la difusión de gas, los modelos de crecimiento poblacional, los sistemas de control con ruido o los sistemas de comunicación.

En computación es común encontrarse con sistemas híbridos en los que se combinan un sistema físico continuo con un proceso de control discreto y finito. Un ejemplo simple es el sistema de control de una barrera en un cruce ferroviario. El movimiento del tren y de los vehículos es continuo, pero los estados del control de la barrera son discretos. Aunque en la práctica todos estos sistemas suelen discretizarse para poder razonar sobre ellos e implementar soluciones, es útil contar con una teoría sobre sistemas continuos que nos permita saber de alguna manera que nuestra discretización es buena.

Los sistemas que estudiamos tienen un espacio de estados continuo pero funcionan a pasos discretos. Por ejemplo, la computadora de a bordo de un automóvil toma, cada un cierto intervalo de tiempo, lecturas de algunos parámetros y de acuerdo a dicha información toma algunas acciones para mantener al vehículo en un funcionamiento óptimo. El número de posibles estados es continuo, pero los pasos de la computadora son discretos.

En [99Des] se introduce una teoría que permite estudiar un proceso continuo en relación a su interacción con su entorno. Intuitivamente, un proceso es un sistema que evoluciona en el tiempo ejecutando ciertas acciones en respuesta a acciones ejecutadas por el entorno. El sistema se encuentra en un estado en un cierto momento y realiza transiciones entre estados dependiendo de qué interacción con el entorno tenga lugar. El formalismo introducido son los procesos de Markov etiquetados (Labelled Markov Processes, LMP),

en los que se usa un conjunto continuo de estados, un conjunto numerable de etiquetas y un conjunto de transiciones etiquetadas. La etiqueta representa la interacción con el entorno: un proceso efectúa una transición etiquetada con a sólo si simultáneamente el entorno efectúa una transición etiquetada con a . Las transiciones asocian a cada estado s y cada acción a una medida de subprobabilidad que describe el efecto de la acción a cuando el proceso está en el estado s .

Con la idea de caracterizar el comportamiento observable desde el entorno, se introduce una noción de equivalencia entre procesos, la denominada relación de bisimulación. Luego, con la intención de dar un primer paso en el desarrollo de métodos formales para tratar con este tipo de sistemas, se trata de dar una caracterización lógica de esta equivalencia, logrando de este modo capturar el comportamiento de los LMP mediante fórmulas lógicas discretas.

En un LMP, dados un estado y una acción existe un único comportamiento probabilista dado por la subprobabilidad correspondiente. En este sentido un LMP es determinista, más allá de ser probabilista. Existen situaciones en las cuales necesitamos modelar un no determinismo no cuantificado que vaya más allá de lo probabilista. Es decir, que para un estado y una acción puedan darse dos o más comportamientos probabilistas totalmente distintos. Por ejemplo, un servidor que recibe mensajes de dos terminales diferentes, y que cambia de estado de acuerdo al mensaje recibido podría tener asociadas, para la única acción de leer un mensaje, dos distribuciones de probabilidad diferentes para los mensajes de una terminal u otra. Pensando en esta posibilidad, y siguiendo la línea de [06W-D'A], definimos los NLMP (Non-deterministic Labelled Markov Processes), incorporando el no determinismo al especificar una relación de transición en la que para cada estado y acción pueda haber más de una comportamiento posible. En este capítulo extendemos la noción de bisimulación y su caracterización a través de una lógica a sistemas probabilistas no deterministas.

3.2. NLMP

Definición 12 (NLMP). Una **relación de transición subprobabilista** sobre un espacio medible (S, Σ) es una relación $\tau \in \Sigma \times \Sigma_{M(S)}$, es decir, una relación entre puntos y medidas de subprobabilidad que es medible como subconjunto de $S \times M(S)$.

Un **NLMP** con conjunto de **etiquetas** \mathcal{A} es una estructura $\mathcal{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in \mathcal{A}\})$, donde (S, Σ) es un espacio Borel estándar que llamaremos de **estados**, y

$$\forall a \in \mathcal{A}, \tau_a \subseteq S \times M(S)$$

es una relación de transición subprobabilista.

Es importante notar que, por el teorema 27, $M(S)$ también es Borel estándar.

Emplearemos la notación $s \xrightarrow{a} \mu$ para indicar que $(s, \mu) \in \tau_a$, y diremos en tal caso que la terna (s, a, μ) es una **transición**. Las etiquetas \mathcal{A} representan posibles acciones del entorno, por lo que usaremos los términos acción o etiqueta indistintamente.

No todo NLMP acepta cualquier acción en cualquier estado con probabilidad uno. De hecho, si así fuera siempre, todos tendrían el mismo comportamiento observable. Si para una acción a y un estado s tenemos $(\tau_a)_s = \emptyset$, se considera que a no se acepta en s . Por otra parte, el uso de subprobabilidades permite dejar parte del comportamiento sin especificar.

Ejemplo 5 (La Pulga de Markov). Una pulga amaestrada se mueve sobre una cuerda de longitud 1 y ante un estímulo externo (e.g., un chasquido de dedos de su entrenador) elige arbitrariamente saltar hacia la derecha o izquierda, y luego da un salto en esa dirección. La distancia que salta es aleatoria y distribuida uniformemente en $[0, 1]$. Esto implica que generalmente habrá una probabilidad de que la pulga se caiga de la cuerda, lo que modelaremos con subprobabilidades ya que no nos interesa modelar lo que hace la pulga luego de caerse. Supondremos que la pulga tiene la inteligencia suficiente para saltar sólo en la dirección segura cuando se halle parada en alguno de los extremos de la cuerda. La modelamos con un NLMP con una sola acción $\mathcal{A} = \{a\}$, $\mathcal{P}_{pulga} = ([0, 1], \mathbf{B}([0, 1]), \{\tau_a\})$, con

$$\tau_a = \{(x, m_{[0,x]}) : x \in (0, 1]\} \cup \{(x, m_{[x,1]}) : x \in [0, 1)\}$$

donde m_I es la medida de Lebesgue concentrada en I , dada por $m_I(Q) = m(I \cap Q) \forall Q \in \mathbf{B}([0, 1])$.

El espacio $([0, 1], \mathbf{B}([0, 1]))$ es claramente Borel estándar y los conjuntos $\{(x, m_{[0,x]}) : x \in (0, 1]\}$ y $\{(x, m_{[x,1]}) : x \in [0, 1)\}$ son gráficos de funciones medibles. Entonces, por la proposición 14, son ambos medibles en $S \times \mathbf{M}([0, 1])$. Luego τ_a es medible y \mathcal{S} es un NLMP.

Fijados un estado $s \in S$ y una etiqueta $a \in \mathcal{A}$, definimos el **grado** de s respecto de a como la cantidad de transiciones posibles desde s con etiqueta a , y lo denotaremos

$$\delta_a(s) := |\{\mu \in \mathbf{M}(S, \Sigma_S) : s \xrightarrow{a} \mu\}|$$

\mathcal{S} se dirá de **imagen numerable** si todos sus grados son numerables, es decir, si para todos $s \in S, a \in \mathcal{A}$, $\delta_a(s)$ es numerable. En particular, si todos los grados son finitos, decimos que \mathcal{S} es de **imagen finita**. Si $n \in \mathbb{N}$, un \mathcal{S} de imagen finita se dice un **n -NLMP** si $\delta_a(s) \leq n$, para todo $s \in S$ y $a \in \mathcal{A}$. Notemos que no todo NLMP de imagen finita es un n -NLMP, ya que los grados podrían ser finitos pero no acotados.

Dada una etiqueta $a \in \mathcal{A}$, definimos el **dominio** de la acción a como el conjunto de aquellos estados que pueden efectuar alguna transición en respuesta a a , es decir

$$\text{dom}_{\mathcal{S}}(a) := \{s \in S : \delta_a(s) \geq 1\} = \pi_S(\tau_a)$$

Fijaremos de ahora en adelante un conjunto de etiquetas \mathcal{A} numerable, y usaremos $\mathcal{S} = (S, \Sigma, \tau)$ para denotar un NLMP cuando sea conveniente, en lugar de la versión más precisa $(S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in \mathcal{A}\})$.

La numerabilidad de las etiquetas servirá luego para garantizar la numerabilidad de las fórmulas lógicas, que será esencial para poder probar propiedades de medibilidad y coincidencia de medidas. Asimismo, requerir que el espacio de estados sea un espacio Borel estándar se verá justificado más adelante cuando probemos las caracterizaciones de la bisimulación por lógicas modales. Recordemos que, por ejemplo, todos los conjuntos G_δ (en particular todos los abiertos y cerrados) en \mathbb{R}^n son Polacos y por lo tanto son espacios Borel estándar con la σ -álgebra $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ restringida. En la práctica, esto es suficiente para representar el espacio de estados de un proceso.

La clase más general que estudiaremos en este trabajo son los NLMP de imagen finita.

3.3. Simulación y Bisimulación

La idea intuitiva de simulación en un NLMP es que un estado s' simula a otro estado s si s' es capaz de imitar cada uno de los posibles comportamientos de s . En este contexto, querríamos que una transición t sea imitada por otra t' cuando su probabilidad de moverse a cualquier conjunto A sea la misma que la probabilidad de t' de moverse a un conjunto de estados que simulan a los estados de A .

De alguna manera, necesitamos saber de antemano qué estados se simulan para verificar la igualdad. Además, no podemos hablar directamente del conjunto de estados que simulan a A en general porque, incluso si A fuera medible, no podemos asegurar que este otro conjunto lo sea. Resultará conveniente entonces, si R es una relación que define una simulación, usar la noción de conjuntos R -cerrados para describirla. Recordemos que un conjunto Q es R -cerrado si contiene todos los estados que están relacionados por R con estados de Q .

3.3.1. Conjuntos R -cerrados

Veamos algunas de las propiedades de los conjuntos R -cerrados.

Proposición 30. I) Si Q es R -cerrado entonces Q^c es (R^{-1}) -cerrado, donde R^{-1} es la relación inversa a R .

II) Si $R \subseteq R'$ y Q es R' -cerrado, entonces Q es R -cerrado.

III) Si R, R' son reflexivas y Q es $(R \circ R')$ -cerrado, entonces también es R -cerrado y R' -cerrado.

Prueba. I) Sean $x \in Q^c$, $y \in S$ tal que $xR^{-1}y$. Entonces yRx y si fuera $y \in Q$ por ser Q R -cerrado tendríamos $x \in Q$. Como esto es falso, debe ser $y \in Q^c$.

- II) Si $x \in Q$, $y \in S$ satisfacen xRy , entonces se cumple también $xR'y$ y luego $y \in Q$ por ser Q R' -cerrado
- III) Si R y R' son reflexivas, se cumple $R, R' \subseteq R \circ R'$ y entonces podemos aplicar el punto anterior. □

Usando conjuntos R -cerrados, podemos levantar una relación R sobre un espacio medible (S, Σ) a una relación sobre $M(S)$, diciendo que $\mu R \mu'$ si para cada R -cerrado $Q \in \Sigma$ se cumple $\mu(Q) = \mu'(Q)$. Usando la proposición 30 podemos ver algunas propiedades útiles de estas relaciones:

Proposición 31. Sean (S, Σ) un espacio medible, $\mu, \mu', \nu \in M(S)$, R, R' relaciones sobre S .

- I) Si $\mu(S) = \mu'(S)$ y $\mu R \mu'$ entonces $\mu R^{-1} \mu'$.
- II) Si $R \subseteq R'$ y $\mu R \mu'$, entonces $\mu R' \mu'$.
- III) Si R, R' son reflexivas y $\mu R \nu R' \mu'$, entonces $\mu(R \circ R') \mu'$

Prueba. I) Sea $Q \in \Sigma$ R^{-1} -cerrado. Por la proposición 30.I, Q^c es R -cerrado y entonces $\mu R \mu'$ implica $\mu(Q^c) = \mu'(Q^c) \Rightarrow \mu(S) - \mu(Q) = \mu'(S) - \mu'(Q)$, y como $\mu(S) = \mu'(S)$, concluimos que $\mu(Q) = \mu'(Q)$.

II) Si $Q \in \Sigma$ es R' -cerrado, entonces por la proposición 30.II Q es R -cerrado, y como $\mu R \mu'$, resulta $\mu(Q) = \mu'(Q)$.

III) Sea $Q \in \Sigma$ $(R \circ R')$ -cerrado. Por la proposición 30.III, Q es R -cerrado y R' -cerrado, y como $\mu R \nu R' \mu'$, tenemos $\mu(Q) = \nu(Q)$ y $\nu(Q) = \mu'(Q)$, de donde resulta $\mu(Q) = \mu'(Q)$. □

3.3.2. Simulación

Definición 13. Una **simulación** sobre el NLMP \mathcal{S} es una relación R sobre S tal que, para cualquier par de estados $s, s' \in S$ con sRs' y cada transición $s \xrightarrow{a} \mu$ hay otra transición $s' \xrightarrow{a} \mu'$ con $\mu' R \mu$. Si sRs' , con R una simulación, decimos que s es **simulado** por s' .

Las relaciones de simulación tienen las siguientes propiedades:

Proposición 32. I) id_S es una simulación.

II) Si $\{R_i\}_{i \in I}$ es una familia de simulaciones, $\bigcup_{i \in I} R_i$ es una simulación.

III) Si R y R' son simulaciones reflexivas, entonces $R \circ R'$ es una simulación reflexiva.

Prueba. I) Inmediato, pues dado $s \text{ id}_S s$, la transición $s \xrightarrow{a} \mu$ es imitada por si misma, ya que $\mu \text{ id}_S \mu$.

II) Si $s(\bigcup_{i \in I} R_i)s'$ entonces $sR_i s'$ para algún $i \in I$. Luego $s \xrightarrow{a} \mu$ es imitada por alguna $s' \xrightarrow{a} \mu'$ con $\mu R_i \mu'$, y entonces por la proposición 31.II, tenemos $\mu(\bigcup_{i \in I} R_i)\mu'$, lo que prueba que $\bigcup_{i \in I} R_i$ es una simulación.

III) Supongamos $s(R \circ R')s''$ y $s \xrightarrow{a} \mu$. Por definición de composición de relaciones, existe s' tal que $sR s' R' s''$. Como R es una simulación, hay una transición $s' \xrightarrow{a} \mu'$ con $\mu R \mu'$ y, dado que R' también es una simulación, hay una transición $s'' \xrightarrow{a} \mu''$ con $\mu' R' \mu''$. Entonces, como R, R' son reflexivas y $\mu R \mu' R' \mu''$, por la proposición 31.III concluimos que $\mu(R \circ R')\mu''$. Luego, $R \circ R'$ es una simulación reflexiva. □

3.3.3. Bisimulación

Podemos dar ahora la definición de bisimulación en términos de relaciones de simulación.

Definición 14. R es una **bisimulación** sobre el NLMP \mathcal{S} si R y R^{-1} son simulaciones.

Las bisimulaciones cumplen las siguientes propiedades:

Proposición 33. I) id_S es una bisimulación.

II) Si R es una bisimulación, entonces R^{-1} es una bisimulación.

III) Si $\{R_i\}_{i \in I}$ es una familia de bisimulaciones, entonces $\bigcup_{i \in I} R_i$ es una bisimulación.

IV) Si R y R' son bisimulaciones reflexivas, $R \circ R'$ también es una bisimulación reflexiva.

Prueba. I) Inmediato por la proposición 13.I.

II) Es obvio por la definición y el hecho de que $(R^{-1})^{-1} = R$.

III) $\bigcup_{i \in I} R_i$ es una simulación por la proposición 13.II, y $(\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$ es una simulación por la misma proposición, ya que $\{R_i^{-1}\}_{i \in I}$ son simulaciones.

IV) $R \circ R'$ es una simulación por la proposición 13.III y $(R \circ R')^{-1} = (R')^{-1} \circ R^{-1}$ es una simulación aplicando lo mismo a las simulaciones $(R')^{-1}$ y R^{-1} . □

Definición 15. Decimos que dos estados s y s' son **bisimilares** ($s \sim s'$) si existe una bisimulación R , tal que $sR s'$. Es decir, $\sim = \bigcup \{R : R \text{ es un bisimulación}\}$.

Notemos que, por la proposición 33.III, \sim es una bisimulación, a la que podemos llamar **la** relación de bisimulación.

Proposición 34. *La relación de bisimulación \sim es de equivalencia.*

Prueba. Por la proposición 33.I, id_S es un bisimulación y entonces $\text{id}_S \subseteq \sim$, por lo que \sim es reflexiva. Dado que \sim es una bisimulación, \sim^{-1} también lo es (por la proposición 33.II, y entonces $\sim^{-1} \subseteq \sim$, de donde se sigue que \sim es simétrica. Por último, como \sim es un bisimulación reflexiva, por la proposición 33.IV $\sim \circ \sim$ es una bisimulación, y entonces $\sim \circ \sim \subseteq \sim$. Luego, \sim es transitiva. \square

Ejemplo 6. En el ejemplo 5 (\mathcal{P}_{ulga}), la relación de simetría respecto de $\frac{1}{2}$ sobre $[0, 1]$, $xRy \Leftrightarrow x + y = 1$, es una bisimulación. Como R es simétrica (i.e., $R = R^{-1}$), basta ver que es una simulación. Todo conjunto R -cerrado Q es simétrico, y por lo tanto, si se cumple xRy valen las igualdades $m_{[0,x]}(Q) = m_{[y,1]}(Q)$ y $m_{[x,1]}(Q) = m_{[0,y]}(Q)$.

3.4. LMP a la Desharnais

Además del uso de espacios Borel estándar en lugar de analíticos, este trabajo se diferencia de [99Des] en que no hemos distinguido un estado inicial y por lo tanto probaremos todos nuestros resultados dentro del ámbito de un único NLMP (hablamos sólo de bisimulación entre estados y no entre procesos). Esta elección simplifica mucho la escritura de las demostraciones y no le resta alcance a nuestros resultados, ya que fácilmente pueden adaptarse al estilo de [99Des] (para el caso en que el conjunto de estados es un espacio Borel estándar). En esta sección nos ocuparemos de crear una *interfaz* de definiciones entre ambos trabajos.

Recordemos primero brevemente las definiciones de LMP y bisimulación de [99Des]

Definición 16 (DLMP). Una **función de transición subprobabilista** sobre un espacio medible (X, Σ) es una función $\tau : X \times \Sigma \rightarrow [0, 1]$ tal que para cada $x \in X$ fijo, la función $\tau(x, \cdot) : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ es una medida de subprobabilidad, y para cada $Q \in \Sigma$ fijo, la función $\tau(\cdot, Q) : X \rightarrow [0, 1]$ es medible.

Un espacio separable metrizable se dice **analítico** si es homeomorfo a un conjunto analítico en un espacio Polaco (con la topología relativa), o equivalentemente si es imagen continua de un espacio Polaco.

Además, un espacio medible es un **espacio Borel analítico** si es isomorfo a $(X, \mathbf{B}(X))$ para algún espacio analítico X . Notemos que como todo espacio Polaco es analítico, en particular todo espacio Borel estándar es Borel analítico.

Un **DLMP** (D por Desharnais o por Deterministic) con conjunto de etiquetas \mathcal{A} es una estructura $\mathcal{S} = (S, i, \Sigma, \{\mu_a \mid a \in \mathcal{A}\})$, donde (S, Σ) es un espacio Borel analítico (de estados), $i \in S$ es el estado inicial, y

$$\forall a \in \mathcal{A}, \tau_a : X \times \Sigma \rightarrow [0, 1]$$

es una función de transición subprobabilista. Al igual que con los NLMP, fijamos \mathcal{A} y escribimos los DLMP en la forma más breve $\mathcal{S} = (S, i, \Sigma, \mu)$.

Una **bisimulación** entre dos DLMP $\mathcal{S}_1 = (S_1, i_1, \Sigma_1, \{\mu_a^1\})$ y $\mathcal{S}_2 = (S_2, i_2, \Sigma_2, \{\mu_a^2\})$ es una relación de equivalencia R sobre $S_1 \uplus S_2$ tal que, para $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ con $s_1 R s_2$, para cada conjunto R -cerrado $Q \subseteq S_1 \uplus S_2$ tal que $Q \cap S_1 \in \Sigma_1$ y $Q \cap S_2 \in \Sigma_2$, se tiene

$$\mu_a^1(s, Q \cap S_1) = \mu_a^2(s, Q \cap S_2)$$

para cada $a \in \mathcal{A}$. Dos estados son **bisimilares** si están relacionados por una bisimulación. Decimos que \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 son **bisimilares** si sus estados iniciales lo son.

Las siguientes definiciones permiten ver que nuestros resultados implican los de [99Des].

Definición 17. Un **LMP** es un 1-NLMP $(S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in \mathcal{A}\})$ con $\delta_a(s) = 1 \forall s \in S$. Es decir, para cada $s \in S$ y $a \in \mathcal{A}$, existe una única $\eta = \eta(s)$ tal que $s \xrightarrow{a} \eta$. Podemos asociar a τ_a una función de transición subprobabilista $\tilde{\tau}_a$, definiendo $\tilde{\tau}_a(s, Q) = (\eta(s))(Q)$ para cada $Q \in \Sigma$.

Un **iLMP** es una estructura $\mathcal{S} = (S, i, \Sigma, \{\mu_a \mid a \in \mathcal{A}\})$, tal que $i \in S$ y $\mu_a = \tilde{\tau}_a$, donde $(S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in \mathcal{A}\})$ es un LMP. i se denomina el **estado inicial** de \mathcal{S} .

Si $\mathcal{S}_1 = (S_1, i_1, \Sigma_1, \{\mu_a^1\})$ y $\mathcal{S}_2 = (S_2, i_2, \Sigma_2, \{\mu_a^2\})$ son iLMP con $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ (si no fueran disjuntos podemos reemplazar a (S_1, Σ_1) por una copia isomorfa), su **suma directa** es un LMP (sin estado inicial)

$$\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 := (S_1 \cup S_2, \Sigma_1 \oplus \Sigma_2, \{\mu_a \mid a \in \mathcal{A}\})$$

tal que para toda $a \in \mathcal{A}$ y todo $Q \in \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ se cumple

$$\begin{aligned} \mu_a(s, Q) &= \mu_a^1(s, Q \cap S_1) \quad \forall s \in S_1 \\ \mu_a(s, Q) &= \mu_a^2(s, Q \cap S_2) \quad \forall s \in S_2 \end{aligned}$$

Dos iLMP \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 con estados iniciales i_1 e i_2 respectivamente, son **bisimilares** si existe una bisimulación R sobre $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ tal que $i_1 R i_2$.

Lema 35. *Todo iLMP es un DLMP y dos iLMP son bisimilares si y sólo si son bisimilares como DLMP.*

Prueba. Sea $\mathcal{S} = (S, i, \Sigma, \{\mu_a \mid a \in \mathcal{A}\})$ un iLMP y sea $\{\tau_a\}$ tal que $\mu_a = \tau'_a$. (S, Σ) es un espacio Borel analítico, por ser Borel estándar.

Para probar que μ_a es una función de transición subprobabilista, debemos ver que para cada $Q \in \Sigma$ fijo, la función $\mu_a(\cdot, Q) : X \rightarrow [0, 1]$ es medible. Sea I medible en \mathbb{R} . Entonces $(\mu_a(\cdot, Q))^{-1}(I) = \pi_S(\tau_a \cap [S \times M_Q^{-1}(I)])$. $M_Q^{-1}(I)$ es medible en $M(S)$, y entonces $S \times M_Q^{-1}(I)$ es un rectángulo medible en $S \times M(S)$. Como τ_a es medible, resulta $A := \tau_a \cap [S \times M_Q^{-1}(I)]$ medible. Como $\delta_a(s) = 1 \forall s \in S$ y $M(S)$ es Borel estándar, podemos aplicar el teorema 24 y concluir que $\pi_S(A) = \{s \in S : \exists! \eta((s, \eta) \in \tau_a)\}$ es medible.

La equivalencia de las nociones de bisimilaridad es una mera aplicación de definiciones. \square

3.5. Lógicas Modales

Las lógicas modales (ver [96CrHu]) agregan a la lógica clásica las nociones de posibilidad y necesidad, introduciendo *modalidades* que permiten expresarlas. Variantes de estas lógicas se han usado para caracterizar equivalencias semánticas como la bisimulación, en un contexto probabilista (ver, por ejemplo [01vanG]). En esta sección definiremos lógicas de este tipo, que emplearemos sobre los NLMP para expresar propiedades que caractericen la bisimulación.

3.5.1. Sintaxis

Describimos a continuación algunas lógicas modales que serán empleadas luego para caracterizar la bisimulación sobre distintas clases de NLMP. La más simple de ellas se denota $\mathcal{L}_>$ y tiene una sintaxis dada por las siguientes fórmulas:

$$\top \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \langle a \rangle_{>q} \phi$$

donde $a \in \mathcal{A}$ y $q \in \mathbb{Q}$.

Usaremos también las siguientes extensiones y variantes de $\mathcal{L}_>$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{<>} &:= \mathcal{L}_> \mid \langle a \rangle_{<q} \phi, \text{ con } q \in \mathbb{Q} \\ \mathcal{L}_\neg &:= \mathcal{L}_{<>} \mid \neg \phi \\ \mathcal{L}_\omega &:= \top \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \neg \phi \mid \langle a \rangle_{[\bowtie_1 q_1 \phi_1, \dots, \bowtie_n q_n \phi_n]} \end{aligned}$$

con $a \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $\bowtie_i \in \{<, >\}$, $q_i \in \mathbb{Q}$, para $i = 1, \dots, n$.

Definimos también, para $m \in \mathbb{N}$, la lógica \mathcal{L}_m que tendrá la misma sintaxis que \mathcal{L}_ω , pero con la restricción de que sea $n \leq m$ en las fórmulas $\langle a \rangle_{[\bowtie_i q_i \phi_i]_{i=1}^n}$. Notemos que gracias a la numerabilidad de \mathcal{A} y a la restricción a cotas probabilistas racionales, todas las lógicas definidas poseen un conjunto numerable de fórmulas.

3.5.2. Semántica

Emplearemos la notación $s \models \phi$ para indicar que la fórmula ϕ es satisfecha por el estado s . Fijada una lógica \mathcal{L} y una interpretación de \models , decimos que dos estados s y t son **equivalentes** (respecto de \mathcal{L}) si satisfacen las mismas fórmulas de \mathcal{L} (es decir, si $\forall \phi \in \mathcal{L} : s \models \phi \Leftrightarrow t \models \phi$), y lo denotaremos $s \approx_{\mathcal{L}} t$ (o simplemente $s \approx t$ si no hay ambigüedad). Definimos también la **semántica** de una fórmula ϕ como el conjunto de todos los estados que la satisfacen:

$$\llbracket \phi \rrbracket := \{s \in S \mid s \models \phi\}$$

Notemos que $\approx_{\mathcal{L}}$ es una relación de equivalencia, y que los conjuntos $\llbracket \phi \rrbracket$ son $\approx_{\mathcal{L}}$ -cerrados.

Definimos a continuación la interpretación de la satisfacción de fórmulas. La semántica de \top , \wedge y \neg es la esperada:

$$\begin{array}{ll}
s \models \top & \forall s \in S \\
s \models \phi_1 \wedge \phi_2 & \text{sii } s \models \phi_1 \text{ y } s \models \phi_2 \\
s \models \neg\phi & \text{sii } s \not\models \phi
\end{array}$$

Diremos que $s \models \langle a \rangle_{>q} \phi$, si ante la acción a hay una transición desde s con probabilidad mayor a q de moverse a un estado que satisfaga ϕ . Es decir, si

$$\exists \mu \in M(S, \Sigma_S), Q \in \Sigma : s \xrightarrow{a} \mu \wedge (\llbracket \phi \rrbracket \supseteq Q) \wedge (\mu(Q) > q)$$

La semántica de $s \models \langle a \rangle_{<q} \phi$ se define en forma análoga:

$$\exists \mu \in M(S, \Sigma_S), Q \in \Sigma : s \xrightarrow{a} \mu \wedge (\llbracket \phi \rrbracket \subseteq Q) \wedge (\mu(Q) < q)$$

La fórmula $\langle a \rangle_{[\bowtie_i q_i]_{i=1}^n} \phi$ funciona como una conjunción de las fórmulas $\langle a \rangle_{\bowtie_i q_i} \phi_i$, pero con la condición adicional de que todas las cotas probabilistas se satisfagan a través de una única transición. Interpretamos $s \models \langle a \rangle_{[\bowtie_i q_i]_{i=1}^n} \phi$ como

$$\exists \mu \in M(S, \Sigma_S), \{Q_i\}_{i=1}^n \subseteq \Sigma : s \xrightarrow{a} \mu \wedge \forall i ((\llbracket \phi_i \rrbracket r_{\bowtie_i} Q_i) \wedge (\mu(Q_i) \bowtie_i q_i))$$

donde interpretamos $r_{>} = \supseteq$ y $r_{<} = \subseteq$. Probaremos más adelante que para cada ϕ resulta $\llbracket \phi \rrbracket$ medible, lo que eliminará la necesidad de hablar de un conjunto Q medible en las interpretaciones. La necesidad de emplear estas extensiones quedará clara en la próxima sección, a medida que surjan las distintas limitaciones expresivas de cada lógica.

Ejemplo 7. Volviendo al ejemplo 5, podemos escribir una fórmula $\phi \in \mathcal{L}_2$ que sea satisfecha por los estados con la siguiente propiedad:

“Saltando en alguna dirección, hay una probabilidad mayor al 60% de no caer fuera de la cuerda y una probabilidad menor al 50% de caer en un punto en el que el próximo salto tenga probabilidad de éxito mayor que 75% en alguna dirección” (Obviamente asumimos que la pulga es obediente y sólo salta cuando se le da la orden a).

Dicha fórmula es $\langle a \rangle_{>0,6} \top$, $<0,5(\langle a \rangle_{>0,75} \top)$.

3.6. Caracterización Lógica de la Bisimulación

Probaremos diferentes caracterizaciones lógicas de la bisimulación, con lógicas cada vez más fuertes a medida que tratamos con sistemas de mayor grado de no determinismo. El caso más simple es el de los LMP.

Adaptaremos la estructura de la prueba de caracterización dada en [99Des]. El principal cambio será que daremos una versión interna de esta prueba, en el sentido de que trabajaremos con bisimulación de estados dentro de un único NLMP, en contraposición con la prueba original que trabajaba con dos LMP con estados iniciales y definía una bisimulación entre sistemas.

3.6.1. Resultados Centrales

Probaremos en esta sección una serie de proposiciones y teoremas que no dependen del tipo de NLMP escogido y son comunes a todas las pruebas de caracterización de la bisimulación

Nuestra primera proposición dice que en un NLMP los conjuntos de estados definibles por fórmulas son siempre medibles. Lo probaremos para \mathcal{L}_ω , de donde se cumplirá para las otras lógicas definidas por ser \mathcal{L}_ω la más expresiva de ellas.

Proposición 36. *Sea $\mathcal{S} = (S, \Sigma, \tau)$ un NLMP de imagen numerable. Entonces para toda fórmula $\phi \in \mathcal{L}_\omega$, se tiene $\llbracket \phi \rrbracket \in \Sigma$.*

Prueba. Lo probamos por inducción en la estructura de ϕ . El caso base \top es obvio, pues $\llbracket \top \rrbracket = S \in \Sigma$. La conjunción y la negación son también inmediatas, ya que por definición una σ -álgebra es siempre cerrada por intersección y complemento. Supongamos ahora que la proposición es cierta para $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ y sea $\psi := \langle a \rangle_{[\bowtie_i q_i \phi_i]_{i=1}^n}$. Por hipótesis inductiva, cada $\llbracket \phi_i \rrbracket$ es medible y entonces $\llbracket \psi \rrbracket = \llbracket \langle a \rangle_{[\bowtie_i q_i \phi_i]_{i=1}^n} \rrbracket = \pi_S(\tau_a \cap [S \times \bigcap_{i=1}^n M_{\llbracket \phi_i \rrbracket}^{-1}(I_i)])$, con $I_i = [0, q_i]$ ó $(q_i, 1]$, según sea $\bowtie_i = <$ ó $>$. Cada $M_{\llbracket \phi_i \rrbracket}^{-1}(I_i)$ es medible en $M(S)$ por definición de $\Sigma_{M(S)}$. Como la intersección numerable de medibles es un medible, $S \times \bigcap_{i=1}^n M_{\llbracket \phi_i \rrbracket}^{-1}(I_i)$ es un rectángulo medible, y es entonces medible en $S \times M(S)$. Luego, como τ_a es medible y todas sus secciones $(\tau_a)_s$, $s \in S$ son numerables, deducimos que $A := \tau_a \cap [S \times \bigcap_{i=1}^n M_{\llbracket \phi_i \rrbracket}^{-1}(I_i)]$ es medible con A_s numerable para todo $s \in S$. Como $M(S)$ es Borel estándar, podemos aplicar el teorema 23 y concluir que $\pi_S(A) = \llbracket \langle a \rangle_{[\bowtie_i q_i \phi_i]_{i=1}^n} \rrbracket$ es medible. \square

Nota 3. Notemos que para cualquier lógica \mathcal{L} de las definidas en 3.5, dada una fórmula $\phi \in \mathcal{L}$, hay otra fórmula $\phi' \in \mathcal{L}_\omega$ tal que $\llbracket \phi' \rrbracket = \llbracket \phi \rrbracket$, por lo que el resultado anterior es válido para cualquiera de estas \mathcal{L} .

Nota 4. Al saber que cada $\llbracket \phi \rrbracket$ es medible, ya no necesitamos hablar de inclusiones con medibles en la semántica, quedando simplificadas las interpretaciones a lo siguiente:

$$\begin{aligned} s \models \langle a \rangle_{>q} \phi, & \quad \text{si } \exists \mu \in M(S, \Sigma_S) : s \xrightarrow{a} \mu \wedge (\mu(\llbracket \phi \rrbracket)) > q) \\ s \models \langle a \rangle_{<q} \phi, & \quad \text{si } \exists \mu \in M(S, \Sigma_S) : s \xrightarrow{a} \mu \wedge (\mu(\llbracket \phi \rrbracket)) < q) \\ s \models \langle a \rangle_{[\bowtie_i q_i \phi_i]_{i=1}^n}, & \quad \text{si } \exists \mu \in M(S, \Sigma_S) : s \xrightarrow{a} \mu \wedge \forall i (\mu(\llbracket \phi_i \rrbracket) \bowtie_i q_i) \end{aligned}$$

Podemos probar ahora una dirección de nuestra caracterización

Teorema 37. *Si s y s' son dos estados bisimilares en un NLMP $\mathcal{S} = (S, \Sigma, \tau)$, entonces son equivalentes respecto de \mathcal{L}_ω . Es decir, $s \sim s' \Rightarrow s \approx_{\mathcal{L}_\omega} s'$.*

Prueba. Sea R una bisimulación en \mathcal{S} . Probamos por inducción en fórmulas que si sRs' y $\phi \in \mathcal{L}_\omega$ entonces $s \models \phi \Leftrightarrow s' \models \phi$. Los casos de \top , la conjunción y la negación son obvios. Ahora supongamos que el enunciado es cierto para $\{\phi_i\}_{i=1}^n$, i.e. para cada par

de estados R -relacionados, cada ϕ_i es satisfecha o bien por ambos o por ninguno de los dos estados. Esto significa que cada $\llbracket \phi_i \rrbracket$ es un R -cerrado, y además es medible por la proposición 36. Como R es una bisimulación, para cada $s \xrightarrow{a} \mu$ hay una $s' \xrightarrow{a} \mu'$ con $\mu R \mu'$, de donde $\mu(\llbracket \phi_i \rrbracket) = \mu'(\llbracket \phi_i \rrbracket) \forall i = 1 \dots n$. Entonces si $s \models \psi := \langle a \rangle_{[\bowtie_i \phi_i]_{i=1}^n}$, con $\bowtie_i \in \{<, >\}$, se da también $s' \models \psi$. Aplicando el mismo razonamiento, vemos que también vale $s' \models \psi \Rightarrow s \models \psi$. \square

Nota 5. La misma observación que hicimos en la nota 3, garantiza que el resultado es también válido para cualquiera de las otras lógicas \mathcal{L} .

Para probar que una lógica \mathcal{L} caracteriza completamente la bisimulación, deberemos ver el recíproco del teorema anterior: ($s \approx_{\mathcal{L}} s' \Rightarrow s \sim s'$). Para lograr esto, queremos probar que $s \approx_{\mathcal{L}} s'$ es una bisimulación, es decir, que para cada $s, s' \in S$ con $s \approx_{\mathcal{L}} s'$ se cumple que por cada transición $s \xrightarrow{a} \mu$ hay una $s' \xrightarrow{a} \mu'$, con $\mu' \approx_{\mathcal{L}} \mu$. Recordemos que esto último significa $\mu(Q) = \mu'(Q)$ para todo $Q \approx_{\mathcal{L}}$ -cerrado medible. Podríamos comenzar tratando de probar que esto vale para los Q definibles por fórmulas (o sea, para $Q = \llbracket \phi \rrbracket$, con $\phi \in \mathcal{L}$). El siguiente teorema nos dice que dicha condición es suficiente, y usa fuertemente el hecho de que S sea un espacio Borel estándar.

Teorema 38. *Sea \mathcal{S} un NLMP y \mathcal{L} una lógica modal tal que para todo par de estados $s \approx_{\mathcal{L}} s'$ y toda transición $s \xrightarrow{a} \mu$, existe una transición $s' \xrightarrow{a} \mu'$ tal que*

$$\mu'(\llbracket \phi \rrbracket) = \mu(\llbracket \phi \rrbracket), \quad \forall \phi \in \mathcal{L}$$

Entonces si dos estados s, s' son equivalentes, son bisimilares. Es decir, $s \approx_{\mathcal{L}} s' \Rightarrow s \sim s'$.

Prueba. Sea $\mathcal{F} := \{\llbracket \phi \rrbracket \mid \phi \in \mathcal{L}\}$. Como $\llbracket \top \rrbracket = S$ y $\llbracket \phi \rrbracket \cap \llbracket \psi \rrbracket = \llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket$, \mathcal{F} es una π -clase y $S \in \mathcal{F}$. Como μ y μ' coinciden sobre \mathcal{F} , por el lema 29 coinciden sobre $\sigma(\mathcal{F})$.

Por la proposición 36, cada $\llbracket \phi_n \rrbracket$ es medible. Además hay una cantidad numerable $\{\phi_n\}$ de fórmulas y se cumple

$$x \approx y \Leftrightarrow \forall n (x \in \llbracket \phi_n \rrbracket \Leftrightarrow y \in \llbracket \phi_n \rrbracket)$$

Se verifican entonces las hipótesis del teorema 25 y concluimos que $\sigma(\mathcal{F}) = \{A \subseteq S \mid A \in \Sigma, A \approx\text{-cerrado}\}$.

Luego, μ y μ' coinciden sobre todos los medibles \approx -cerrados y entonces $\approx_{\mathcal{L}}$ es una simulación. Como $\approx_{\mathcal{L}}$ es simétrica, resulta una bisimulación.

Luego, $s \approx_{\mathcal{L}} s' \Rightarrow s \sim s'$. \square

3.6.2. Cada Loco con su Lógica

Por lo visto hasta ahora, el “esqueleto” de la prueba de caracterización está formado por la proposición 36 y los teoremas 37 y 38. Dado un NLMP, cualquier lógica que

satisfaga la hipótesis del teorema 38 caracterizará a la bisimulación en ese NLMP. En esta sección nos dedicaremos a encontrar, para clases particulares de NLMP, lógicas que satisfagan esta hipótesis. Comenzaremos con el caso LMP, y luego exhibiremos ejemplos de NLMP con mayor grado de no determinismo en los que se verá la necesidad de emplear lógicas más expresivas.

LMP

Nuestro primer lema completa la reconstrucción de la prueba de la caracterización de [99Des] para LMP.

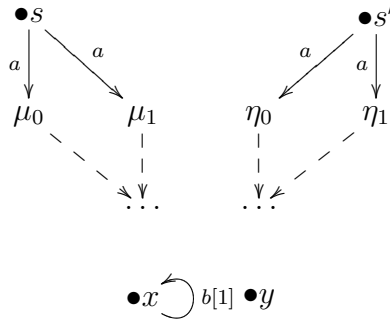
Lema 39. *Sea $\mathcal{S} = (S, \Sigma, \tau)$ un LMP. Entonces para todo par de estados $s \approx_{\mathcal{L}_>} s'$ y toda $a \in \mathcal{A}$, se cumple $\mu_a(s, \llbracket \phi \rrbracket) = \mu_a(s', \llbracket \phi \rrbracket)$, $\forall \phi \in \mathcal{L}_>$.*

Prueba. Supongamos que la ecuación no es cierta. Entonces, para alguna ϕ se tiene, por ejemplo, $\mu_a(s, \llbracket \phi \rrbracket) < \mu_a(s', \llbracket \phi \rrbracket)$. Tomemos un racional q entre estos dos valores. Entonces se sigue que $s' \models \langle a \rangle_{>q} \phi$ pero $s \not\models \langle a \rangle_{>q} \phi$ \square

2-NLMP

Si deseamos probar un resultado análogo al anterior para 2-NLMP, la lógica $\mathcal{L}_>$ resulta insuficiente, e incluso $\mathcal{L}_{<>}$ tampoco alcanza. Podemos verlo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8.



La notación $b[1]$ indica que $x \xrightarrow{b} \mu$ con $\mu(\{x\}) = 1$. Las μ_i y η_i se anulan fuera de $\{x, y\}$ y vienen dadas por la siguiente tabla:

*	μ_0	μ_1	η_0	η_1
$\{x\}$	0,1	0,2	0,1	0,2
$\{y\}$	0,2	0,2	0,3	0,1

Veremos que $s \approx_{\mathcal{L}_{<>}} s'$, pero $s \not\approx s'$.

Si fuera $s \sim s'$, ya que $s \xrightarrow{a} \mu_0$, debería ser $\mu_0 \sim \eta_k$, para algún k . Pero $\{x\}, \{y\}$ son \sim -cerrados y vemos en la tabla que $\mu_0 \approx \eta_k$ para todo k . Luego, $s \approx s'$.

Veamos por inducción en fórmulas que $s \approx_{\mathcal{L}_{<}} s'$. Los casos \top , y \wedge son inmediatos. Supongamos $s \vDash \psi := \langle l \rangle_{>q} \phi$. Entonces, debe ser $l = a$ y para algún k se tiene

$$\mu_k(\llbracket \phi \rrbracket \cap \{x, y\}) = \mu_k(\llbracket \phi \rrbracket) > q$$

Ahora, $\llbracket \phi \rrbracket \cap \{x, y\}$ puede ser sólo $\{x\}$ o $\{x, y\}$ (sin \neg es imposible distinguir a y por una fórmula) y por construcción de las μ_i y η_j , hay una η_j tal que $\eta_j(\llbracket \phi \rrbracket) = \mu_k(\llbracket \phi \rrbracket)$ y entonces $\eta_j(\llbracket \phi \rrbracket) > q$, con lo que $s' \vDash \psi$. Análogamente, asumiendo $s' \vDash \psi$ podemos concluir que $s \vDash \psi$. Del mismo modo vemos que se cumplen las mismas fórmulas de la forma $\langle l \rangle_{<q} \phi$.

Reforzando la lógica a \mathcal{L}_{\neg} podemos probar la hipótesis para 2-NLMP:

Lema 40. *Sea $\mathcal{S} = (S, \Sigma, \tau)$ un 2-NLMP. Entonces para todo par de estados $s \approx_{\mathcal{L}_{\neg}} s'$ y toda transición $s \xrightarrow{a} \mu$, existe una transición $s' \xrightarrow{a} \mu'$ tal que $\mu'(\llbracket \phi \rrbracket) = \mu(\llbracket \phi \rrbracket)$, $\forall \phi \in \mathcal{L}_{\neg}$.*

Prueba. Si $\delta_a(s) = 0$ no hay nada que probar. Si $\delta_a(s) \neq 0$ existe al menos una transición $s \xrightarrow{a} \mu$. Sea $q \in \mathbb{Q}, q > \mu(S)$. Como $s \vDash \phi := \langle a \rangle_{<q} \top$, se tiene $s' \vDash \phi$, de donde $\delta_a(s') \neq 0$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\delta_a(s) = \delta_a(s') = 2$ y que $s \xrightarrow{a} \mu_1$, $s \xrightarrow{a} \mu_2$, $s' \xrightarrow{a} \mu'_1$, $s' \xrightarrow{a} \mu'_2$ son todas las transiciones posibles para s y s' (por ejemplo, el caso $\delta_a(s) = 1$ podrá deducirse de esta prueba poniendo $\mu_1 = \mu_2$).

Sea $\phi \in \mathcal{L}_{\neg}$, y sean $M := \max\{\mu_1(\llbracket \phi \rrbracket), \mu_2(\llbracket \phi \rrbracket)\}$, $M' := \max\{\mu'_1(\llbracket \phi \rrbracket), \mu'_2(\llbracket \phi \rrbracket)\}$. Tiene que ser $M = M'$, ya que si, por ejemplo, $M < M'$, tomando un racional q tal que $M < q < M'$ se tiene $s' \vDash \langle a \rangle_{>q} \phi$ pero $s \not\vDash \langle a \rangle_{>q} \phi$, lo que contradice $s \approx s'$.

Análogamente si tuviéramos, por ejemplo,

$$\min\{\mu_1(\llbracket \phi \rrbracket), \mu_2(\llbracket \phi \rrbracket)\} < \min\{\mu'_1(\llbracket \phi \rrbracket), \mu'_2(\llbracket \phi \rrbracket)\},$$

podríamos tomar q tal que $s' \vDash \langle a \rangle_{<q} \phi$ y $s \not\vDash \langle a \rangle_{<q} \phi$. Podemos ver entonces que los mínimos también coinciden.

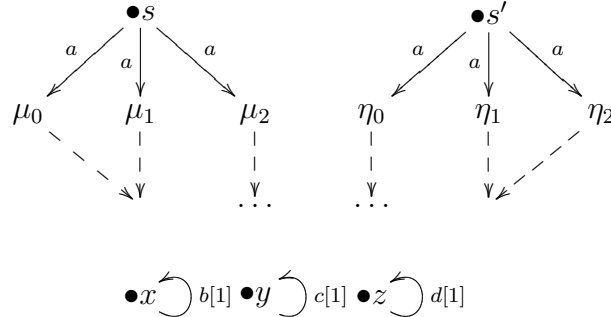
Combinando estos dos resultados obtenemos $\{\mu_1(\llbracket \phi \rrbracket), \mu_2(\llbracket \phi \rrbracket)\} = \{\mu'_1(\llbracket \phi \rrbracket), \mu'_2(\llbracket \phi \rrbracket)\}$.

Dado que $\llbracket \phi \rrbracket \cup \llbracket \psi \rrbracket = \llbracket \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \rrbracket$ y $\llbracket \phi \rrbracket \setminus \llbracket \psi \rrbracket = \llbracket \phi \wedge \neg\psi \rrbracket$, deducimos que $\Gamma = \{\llbracket \phi \rrbracket \mid \phi \in \mathcal{L}_{\neg}\}$ es un álgebra. Entonces tomando $\mu = \mu_1$ ó μ_2 , tenemos que $\Gamma, \mu, \mu'_1, \mu'_2$ satisfacen las hipótesis del lema 28 y podemos concluir que alguna μ'_k cumple $\mu'_k(B) = \mu(B) \forall B \in \Gamma$, es decir, $\mu'_k(\llbracket \phi \rrbracket) = \mu(\llbracket \phi \rrbracket) \forall \phi \in \mathcal{L}_{\neg}$. \square

n -NLMP y NLMP de imagen finita

Al pasar a estudiar NLMP con mayor grado de no determinismo, nuevamente es necesario extender la lógica, ya que resulta demasiado débil para caracterizar la bisimulación. Veamos un ejemplo que muestra la insuficiencia de \mathcal{L}_{\neg} :

Ejemplo 9.



Las μ_i y η_i se anulan fuera de $\{x, y, z\}$ y vienen dadas por la siguiente tabla:

*	μ_0	μ_1	μ_2	η_0	η_1	η_2
$\{x\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\{y\}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\{z\}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

Veremos que $s \approx_{\mathcal{L}_-} s'$, pero $s \not\approx s'$.

Si fuera $s \sim s'$, ya que $s \xrightarrow{a} \mu_0$, debería ser $\mu_0 \sim \eta_k$, para algún k . Pero $\{x\}, \{y\}, \{z\}$ son \sim -cerrados y vemos en la tabla que $\mu_0 \not\approx \eta_k$ para todo k . Luego, $s \not\approx s'$.

Veamos por inducción en fórmulas que $s \approx_{\mathcal{L}_-} s'$. Los casos \top , \neg y \wedge son inmediatos. Supongamos $s \models \psi := \langle l \rangle_{>q} \phi$. Entonces, debe ser $l = a$ y para algún k se tiene

$$\mu_k(\llbracket \phi \rrbracket \cap \{x, y, z\}) = \mu_k(\llbracket \phi \rrbracket) > q$$

Ahora, por construcción de las μ_i y η_j , hay una η_j tal que $\eta_j(\llbracket \phi \rrbracket) = \mu_k(\llbracket \phi \rrbracket)$ y entonces $\eta_j(\llbracket \phi \rrbracket) > q$, con lo que $s' \models \psi$. Análogamente, asumiendo $s' \models \psi$ podemos concluir que $s \models \psi$. Del mismo modo vemos que se cumplen las mismas fórmulas de la forma $\langle l \rangle_{<q} \phi$.

El fallo de la caracterización lógica en este ejemplo radica en la imposibilidad de \mathcal{L}_- de imponer condiciones múltiples que deban cumplirse a través de una única transición. Es por esto que nuestro ejemplo explota las propiedades de “imitación cruzada” de las medidas asociadas a uno y otro estado. Esta necesidad es la que nos impulsó a introducir las lógicas \mathcal{L}_n y \mathcal{L}_ω .

Lema 41. *Sea $\mathcal{S} = (S, \Sigma, \tau)$ un n -NLMP. Entonces para todo par de estados $s \approx_{\mathcal{L}_n} s'$ y toda transición $s \xrightarrow{a} \mu$, existe una transición $s' \xrightarrow{a} \mu'$ tal que $\mu'(\llbracket \phi \rrbracket) = \mu(\llbracket \phi \rrbracket)$, $\forall \phi \in \mathcal{L}_n$.*

Prueba. Al igual que en el caso 2-NLMP, se puede probar que si $s \approx_{\mathcal{L}_n} s'$ entonces para todo a , $\delta_a(s) = 0 \Leftrightarrow \delta_a(s') = 0$. Supongamos que el lema es falso. Entonces existen s y s' , con $s \approx_{\mathcal{L}_n} s'$, y una transición $s \xrightarrow{a} \mu$ tal que para cada transición $s' \xrightarrow{a} \mu_i$ hay al menos

una fórmula $\phi_i \in \mathcal{L}_\omega$ con $\mu(\llbracket \phi_i \rrbracket) \neq \mu_i(\llbracket \phi_i \rrbracket)$. Como \mathcal{S} es un n -NLMP, hay a lo sumo n transiciones $s' \xrightarrow{a} \mu_i$. Sean μ_1, \dots, μ_m , $m \leq n$ todas las medidas de estas transiciones.

Para $i = 1 \dots m$, sea q_i un racional estrictamente entre $\mu(\llbracket \phi_i \rrbracket)$ y $\mu_i(\llbracket \phi_i \rrbracket)$, y definamos $\bowtie_i := >$ ó $<$, según sea $\mu(\llbracket \phi_i \rrbracket)$ mayor o menor que $\mu_i(\llbracket \phi_i \rrbracket)$. Entonces definiendo $\gamma := \langle a \rangle [\bowtie_i q_i \phi_i]_{i=1}^m$, tenemos que $s \models \gamma$, pero $s' \not\models \gamma$, lo que contradice $s \approx s'$. \square

Corolario 42. *Si \mathcal{S} es un NLMP de imagen finita, entonces para todo par de estados $s \approx_{\mathcal{L}_\omega} s'$ y toda transición $s \xrightarrow{a} \mu$, existe una transición $s' \xrightarrow{a} \mu'$ tal que $\mu'(\llbracket \phi \rrbracket) = \mu(\llbracket \phi \rrbracket)$, $\forall \phi \in \mathcal{L}_\omega$.*

3.6.3. Teorema de Caracterización Lógica de la Bisimulación

Finalmente, aplicando la proposición 36 y los teoremas 37 y 38, junto con los lemas 39, 40 y 41, obtenemos el siguiente teorema general:

Teorema 43 (Caracterización lógica de la bisimulación para NLMP de imagen finita). *Sea $\mathcal{S} = (S, \Sigma, \tau)$ un NLMP de imagen finita (LMP, 2-NLMP, n -NLMP) y sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\omega$ ($\mathcal{L}_>$, $\mathcal{L}_<$, \mathcal{L}_n respectivamente). Entonces para todo par de estados $s, s' \in S$, se satisface*

$$s \approx_{\mathcal{L}} s' \Leftrightarrow s \sim s'$$

Capítulo 4

Conclusiones y Trabajo Futuro

El principal aporte de este trabajo es la construcción de la teoría de NLMP sobre espacios Polacos en vez de analíticos, abriendo una línea que no aparecía como posible en [99Des]. Si bien los espacios analíticos son más generales que los Polacos, su definición es más técnica, con las complicaciones que ello conlleva. Notemos que los espacios analíticos no fueron introducidos para darle más generalidad a la teoría sino por una limitación técnica que impedía usar sólo espacios Polacos (debido al uso de cocientes en la prueba). En la práctica, es difícil imaginar procesos que requieran el uso de un espacio analítico no Polaco como conjunto de estados.

El estudio de los espacios Polacos y analíticos y sus propiedades relevantes en la teoría de NLMP, permitió lograr, además del aporte ya mencionado, una mejor estructuración de las pruebas de caracterización lógica de la bisimulación, aislando una propiedad central que garantiza que una lógica caracteriza la bisimulación. Notemos que los conjuntos analíticos, a pesar de ya no ser usados como espacios de estados, siguen teniendo un rol fundamental en la demostración de los resultados técnicos utilizados (los teoremas de Blackwell y de Lusin-Novikov, son ambas consecuencias del Teorema de Separación de Lusin).

Sin embargo, puede ser interesante ver que nuestros resultados se verifican también sobre espacios analíticos de estados, ya que esto permitiría una mejor integración con los resultados de [99Des] y todo el desarrollo subsiguiente. También se podría intentar dar una organización categórica de los NLMP. Otras posibles mejoras se refieren a la eliminación de algunas de las restricciones impuestas aquí, como por ejemplo, retirar la condición de imagen finita o trabajar sobre procesos con conjuntos no numerables de acciones (por ejemplo, en los que la interacción con el entorno pueda estar dada por variables temporales o físicas continuas).

Bibliografía

- [06W-D'A] NICOLÁS WOLOVICK, PEDRO D'ARGENIO: Trabajo en progreso. *FaMAF, Córdoba*
- [05Des] VINCENT DANOS, JOSÉE DESHARNAIS, FRANÇOIS LAVIOLETTE, PRAKASH PANANGADEN: "Bisimulation and Cocongruence for Probabilistic Systems". *McGill University, Montréal, Québec - Université Paris 7 and CNRS - Université Laval, Québec, 2005*
- [01vanG] ROB J. VAN GLABBEEK: "The linear time - branching time spectrum I; the semantics of concrete, sequential processes", en: "Handbook of Process Algebra". *Chapter 1, Elsevier, 2001, pp. 3-99*
- [99Des] JOSÉE DESHARNAIS: "Labelled Markov Processes" *School of Computer Science. McGill University, Montréal, 1999*
- [96CrHu] MAX J. CRESSWELL, G. E. HUGHES: "A New Introduction to Modal Logic" *Routledge, London, 1996*
- [95Kec] ALEXANDER S KECHRIS: "Classical Descriptive Set Theory". *Springer-Verlag, 1995*
- [91LS] K.G. LARSEN, A. SKOU: "Bisimulation through Probabilistic Testing" en "Information and Computation", *94(1):1-28, 1991*
- [89Mil] R.MILNER: "Communication and Concurrency" *Prentice Hall, 1989*
- [86Bil] PATRICK BILLINGSLEY: "Probability and Measure". *John Wiley and Sons, New York, 1986*
- [70Rud] WALTER RUDIN: "Real and Complex Analysis". *McGraw Hill, 1970*
- [Wiki] Wikipedia <http://wikipedia.org>

Índice alfabético

- λ -clase, 13
- π -clase, 13
- álgebra, 13
- árbol, 5
 - de un conjunto cerrado, 6
- σ -álgebra
 - generada, 14
 - generadores, 13
- analítico
 - en Borel estándar, 19
 - en Polaco, 18
- Baire, espacio de (\mathcal{N}) , 8
- bianalítico, 19
- bisimilares
 - DLMP, 32
 - iLMP, 32
 - NLMP, estados, 30
- bisimulación
 - \sim , 31
 - en NLMP, 30
 - entre DLMP, 32
- Blackwell, 20
- bola abierta, 4
- Borel
 - automorfismo, 16
 - conjuntos, 15
 - función medible, 16
 - isomorfismo, 16
- Borel analítico, espacio, 31
- Borel estándar, espacio, 16
- Cantor
 - espacio de (\mathcal{C}) , 8
 - esquema de, 11
- Caracterización Lógica, teorema, 40
- Cauchy, sucesión de, 7
- clopen, 16
- co-analítico, 19
- coincidencia, 22
- completación, 7
- completamente metrizable, 7
- completo, 7
- denso, 4
- DLMP, 31
- dominio de una acción, 27
- equivalencia de estados, 33
- estado inicial, 32
- etiquetas, 26
- F_σ , 7
- función asociada (esquema de Lusin), 12
- función de transición subprobabilista, 31
- G_δ , 7
- grado, 27
- iLMP, 32
- imagen finita, 27
- imagen numerable, 27
- lógicas modales, 33
- λ - π , 13
- \mathcal{L}_m , 33
- $\mathcal{L}_{\langle \rangle}$, 33
- LMP, 32
- \mathcal{L}_{\neg} , 33
- \mathcal{L}_ω , 33
- Lusin
 - esquema de, 12
- Lusin-Novikov, teorema, 20
- métrica, 4
 - compatible, 4
- métrico
 - espacio, 4
 - topología del espacio, 4
- medible

- conjunto, 14
- espacio, 14
- función, 14
- incrustación, 14
- isomorfismo, 14
- subespacio, 14
- medida
 - de Lebesgue, 21
 - de probabilidad, 21
 - de subprobabilidad, 21
 - en Q , 21
 - finita, 21
- metrizable, 4

- N_2 , 4
- NLMP, 26
- n -NLMP, 27

- oscilación, 8

- $P(X)$, 21
- $M(X)$, 21
- perfecto, 11
- podado, árbol, 6
- Polaco, espacio, 7
- probabilidad, 21
- producto
 - de espacios métricos, 4
 - de espacios medibles, 14
 - de espacios topológicos, 4
- propia, función, 6
- \mathcal{P}_{ulga} , 27, 31, 34
- punto límite, 10

- R -cerrado, 20, 28
- relación de transición subprobabilista, 26
- retracto, 7

- satisfacción (\models), 33
- sección, 20
- semántica ($\llbracket \phi \rrbracket$), 33
- separable, 4
- Separación de Lusin, teorema, 19
- $\Sigma_1^1(X)$, 18, 19
- σ -álgebra, 13
- simulación, 29
- Souslin, teorema, 19
- subprobabilidad, 21
- sucesiones finitas, 5
- suma
 - de espacios medibles, 15
 - de iLMP, 32
- transición, 27