



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA,
ASTRONOMÍA Y FÍSICA

No determinismo completamente medible en procesos probabilísticos continuos

Budde, Carlos Esteban

Directores: D'Argenio, Pedro R.
Sánchez Terraf, Pedro

27 de Marzo de 2012

Clasificación: F.4.1 [**Mathematical Logic and Formal Languages**]: Mathematical logic—*model theory*; G.3 [**Probability and Statistics**]: Markov processes; F.3.2 [**Logics and Meanings of Programs**]: Semantics of Programming Languages—*process models*.

Términos generales: Teoría de la computación.

Palabras clave: procesos markovianos etiquetados, LMP, no determinismo medible, NLMP, NLMP con estructura en las etiquetas.

Resumen

Este trabajo se encuadra dentro del ámbito computacional en la semántica de procesos. El concepto usual de “Sistema de Transición Etiquetado” (LTS—Labelled transition system) sólo permite modelar sistemas cuyo espacio de estados tiene dimensión finita o, a lo sumo, numerable. Mediante herramientas matemáticas topológicas y de teoría de la medida, el grupo de Josée Desharnais extiende la expresividad del modelo a espacios medibles de dimensión potencialmente infinita no numerable. A estos nuevos sistemas se los denomina “procesos de Markov etiquetados” (LMP—Labelled Markov processes).

Los LMPs no consideran situaciones de no determinismo interno, que son comunes tanto en situaciones de laboratorio como en las aplicaciones a casos específicos de la vida real. Para suplir esta falencia surgen los “procesos de Markov etiquetados no deterministas” (NLMPs—Non-deterministic labelled Markov processes). El estudio de estos procesos por parte del grupo de D’Argenio revela diferencias entre las diversas nociones de bisimulación del modelo, tanto en casos determinísticos como en el escenario más general. Aquí se busca acercar dichas nociones.

El presente trabajo extiende la teoría de los procesos de Markov etiquetados no deterministas, otorgándole a estos sistemas una estructura medible sobre su espacio de etiquetas. Las bisimulaciones, la lógica asociada y todos los resultados principales para los NLMPs se adaptan a la teoría con estructura en las etiquetas. Se prueba además que este nuevo modelo es un caso particular del anterior, en el cual dejan de ser válidos ciertos sistemas ideados por el grupo de D’Argenio, que verifican (en procesos sin estructura en las etiquetas) la existencia de diferencias entre las relaciones de bisimulación.

Agradecimientos

Primero le toca a la familia, la magnitud de cuyo apoyo no siempre recibe la gratitud que debería, pues al estar tan cerca la perspectiva nos impide apreciarlo. Lo cierto es que sin la contención constante de mi padre Carlos, mi madre Lucía y mi hermano Leopoldo todo esto habría sido como intentar construir un castillo en las nubes. También quiero agradecer a mi tía Luisa y al Pablo, y a todos los que, desde cerca o desde lejos, estuvieron acompañándome.

Por supuesto que para construir cualquier cosa es necesario disponer de los materiales, y ahí es donde entran los profesores de FaMAF. Año tras año ellos me han ayudado, con mucha paciencia algunos y no con tanta otros, a buscar más allá de las palabras y los símbolos, y (con un poco de suerte) a obtener el jugoso contenido que parece ocultarse con tan buen tino entre crípticos lemas e indescifrables teoremas.

Dedico además un agradecimiento extra a tres personas de la facultad: a mis dos directores, Pedro&Pedro, por haberme bancado en este último período cuyo jugoso fruto aún saboreo con deleite; y al Nico, una de las personas más didácticas y afables que conozco, que casualmente fue uno de los principales responsables en mi elección de carrera. Claro está que tampoco me olvido de Oscar Bustos, Carlos Marqués, el flaco Gramaglia, Penazzi, Ricardo Zamar, Dani Moissette, el Nasa, Diego Vaggione, el Camper y Demetrio, Kisbye&Pury, Pancho Tamarit, Pablo Ferreyra, Javier Gaspar, Renato, Damián Barsotti, Martincito, Javi Blanco, y tantos otros que la lista se haría interminable.

Tampoco es todo trabajo en la vida, y los descansos pueden ser igual de importantes que los esfuerzos. Para eso están los amigos, tanto los viejos conocidos de CN1 como la gente que conocí en FaMAF. Entre todos hemos charlado, reído, estudiado, jugado al fútbol, comido asados y tomado buenos ferneces. A mis amigos les digo: ¡alégrense, que todavía tenemos camino por delante! Cierro el párrafo con un saludo a mi persona especial, la Mari, a quien le deseo desde el fondo de mi corazón que encuentre el rumbo que a veces es tan difícil de distinguir entre las vueltas de la vida.

Por último, pero no por ello menos importante, quiero enviarles un abrazo a la Pao y al negro Sergio, mis profes de natación y Muay-Thai respectivamente. Si hay cosas difíciles de conseguir en los tiempos que corren seguramente el equilibrio y la armonía personales están entre ellos. En esta búsqueda me atengo al refrán latino: *Mens sana in corpore sano*, y espero que en las muchas clases que nos quedan lo sigamos llevando a la práctica.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivaciones	1
1.2. Esquema del trabajo	3
2. Conceptos básicos	4
2.1. Sistemas de Transición Etiquetados	4
2.2. Bisimulación clásica	6
2.3. Lógica Hennessy-Milner	9
2.4. σ -álgebras y medibilidad	9
2.5. σ -álgebras y relaciones	13
2.6. Procesos markovianos Etiquetados	15
2.6.1. Sistema de transiciones	15
2.6.2. La nueva bisimulación	20
2.7. Resumen	22
3. NLMP: un enfoque semi-estructurado	23
3.1. Concepto	23
3.2. Bisimulaciones	28
3.3. La lógica \mathcal{L}	33
3.4. Resultados principales	34
3.5. Distinción de las bisimulaciones	35
3.5.1. NLMPs no-probabilísticos	36
3.5.2. Desigualdad $\sim_t \neq \sim_s$	39
3.5.3. Desigualdad $\sim_s \neq \sim_e$	42
3.6. Resumen y conclusiones	44

4. NLMP con estructura en las etiquetas	46
4.1. Motivaciones estructurales	46
4.2. El modelo	48
4.2.1. Compatibilidad hacia atrás: LMPs	49
4.2.2. Compatibilidad hacia atrás: NLMPs semi-estructurados	50
4.3. Descarte del NLMP que distingue a \sim_t de las otras bisimulaciones	55
4.4. Resumen	56
5. Bisimulaciones revisadas	57
5.1. Las definiciones	57
5.2. Su interrelación	59
5.3. Resumen	63
6. La lógica	64
6.1. Definición	64
6.2. Caracterización de \sim_e	65
6.3. El NLMP \mathbb{S}_2 no distingue a \sim_s de \sim_e	69
6.4. Completitud para el caso analítico y finito	71
6.5. Resumen	74
7. Conclusiones	75
A. Más sobre medibilidad	77
B. Pruebas de resultados mencionados	81
C. Schedulers y probabilidad de trazas	84

Índice de figuras

2.1. LTS simple	5
2.2. LTS no determinístico	5
2.3. LTS y bisimulación	8
2.4. LTS y bisimulación (bis)	8
2.5. LMP finito	17
2.7. Distribuciones Beta	19
2.8. LMP de un aire acondicionado	20
3.1. Un NLMP sencillo	26
3.2. NLMP de un aire acondicionado	28
3.3. NLMP que prueba la desigualdad $\sim_t \neq \sim_s$	40
3.4. NLMP que prueba la desigualdad $\sim_s \neq \sim_e$	43
4.2. NLMP fuera del modelo estructurado	54
A.1. Triángulo medible	79
C.1. NLMP finito con no determinismo	84

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivaciones

En la actualidad los sistemas de computación se encuentran prácticamente en todos los ámbitos de las sociedades de (casi) todo el mundo. La mayoría están insertos en entornos con una enorme cantidad de grados de libertad, operando junto a otros artefactos con comportamientos físicos o químicos sumamente complejos. Éstos pueden encontrarse en electrónica de consumo, dentro de controladores de sistemas industriales, en aviónica y satélites, a bordo de automóviles y medios de transportes en general, etc.

Resulta evidente que, cada día más, dependemos fuertemente de su *buen funcionamiento*, donde la definición del adjetivo suele adquirir diversas interpretaciones. En la mayor parte de los casos necesitamos que estos dispositivos brinden servicios correctos, confiables, seguros, robustos, y que estén continuamente disponibles (es decir, donde la terminación del proceso principal no sea una situación deseable).

Otra interpretación de popularidad creciente para la frase “buen funcionamiento” es *independencia del monitoreo humano*. Es decir que además se les suele exigir eficiencia en el consumo energético, dado que se espera de ellos una gran autonomía. Esto se pone en evidencia en cualquier tipo de red de sensores inalámbricos, o en los dispositivos móviles para auxilio de discapacitados y ancianos, por sólo mencionar un par de ejemplos.

Dado que la mayoría de estos sistemas se integran en un entorno físico complejo, su modelado¹ requiere de herramientas matemáticas mucho más poderosas y expresivas que las lógicas y los modelos discretos habituales. Para convencerse de ello basta considerar la presencia usual de parámetros de tiempo real y requerimientos continuos como voltaje, intensidad de corriente, temperatura, presión, etc., que necesitan ser cuantificados de diversas maneras, inclusive estocásticamente. Es por esto que los modelos matemáticos y las lógicas que describen a los sistemas computacionales y sus requerimientos demandan una matemática más compleja que incluya, al menos, conceptos topológicos y de teoría de la medida.

Ahora bien, ¿es realmente tan común toparse con sistemas que deban manejar tales variables en su formato continuo?, ¿no bastaría con representar sus valores de manera

¹ Otra pregunta totalmente válida es “y... ¿para qué modelar?” En lo que a nosotros respecta, estamos de acuerdo con la respuesta ofrecida en [BaiK08, p. 7].

muy fina, pero discretamente al fin? Es preciso observar que *las computadoras* entendidas en su sentido más amplio comparten todas una característica ineludible: operan en un mundo discreto. Los datos que pueden representar y manejar son siempre, en el fondo, discretos. ¿Qué necesidad hay pues de entrometerse con el mundo continuo?

La respuesta a esa última pregunta es el objetivo a largo plazo al que apunta el presente trabajo. Como ya se mencionó, cualquier interpretación de un valor continuo por parte de un ordenador debe discretizarse, lo que evidentemente conlleva cierto error de aproximación. Cabe preguntarse: ¿cual es ese margen de error?, ¿coinciden, en la medida de lo razonable, el modelo computacional discreto con el mundo físico continuo² que intenta interpretar? Para saberlo es preciso contar con alguna herramienta que nos permita comparar las representaciones de dos procesos, por ejemplo las *relaciones de bisimilitud*.

Uno de los principales resultados que aquí se presentan extiende las nociones actuales de bisimulación, adecuándolas al nuevo modelo. Una relación de bisimulación se utiliza para determinar formalmente si dos procesos presentan el mismo comportamiento observable. Supóngase pues que se representa cierto sistema físico de naturaleza continua mediante un proceso, y al sistema informático encargado de interpretarlo con otro. Entonces si se logra demostrar que estos procesos son bisimilares (para alguna noción de bisimilitud escogida), se está dando una prueba formal de que la aproximación discreta realizada por la computadora respecto de su entorno, se encuentra dentro de los márgenes de error tolerables.

Para proceder de la forma mencionada, debe contarse con formalismos que posibiliten la representación de la estructura y la dinámica de sistemas complejos, con un espacio de estados posiblemente no numerable. Asimismo es necesario disponer de técnicas formales para comparar sus comportamientos observables. Por último, puesto que en diversas situaciones dicho comportamiento se encuentra sujeto a elecciones no deterministas inobservables para el entorno, se desea que el modelo a definir considere situaciones de no determinismo interno. Estos tres puntos constituyen los objetivos generales del trabajo.

Por su parte, los objetivos específicos son:

- Definir una nueva noción de *proceso de Markov etiquetado no determinista*, también llamado NLMP por siglas en inglés.
- Solucionar con ella los problemas conocidos para el modelo actual de NLMPs, que denominaremos semi-estructurado.
- Extender los resultados que existen en el modelo semi-estructurado hacia el nuevo formalismo.
- Acercar entre sí las diferentes nociones de bisimulación.

² Si bien actualmente se cree que la naturaleza de nuestro universo es en realidad discreta, para el observador humano el aspecto cuantificado de la naturaleza resulta imposible de apreciar, al menos en la vida cotidiana.

1.2. Esquema del trabajo

En el Capítulo 2 se introducen primero los conceptos elementales de semántica de procesos: LTS, bisimulación clásica y lógica de Hennessy-Milner. A continuación se presentan herramientas matemáticas que permiten trabajar con espacios arbitrarios y eventos sobre ellos: teoría de la medida, algunos conceptos topológicos y del producto cartesiano. Por último se presenta el modelo de los procesos markovianos etiquetados o LMPs, que es el formalismo ideado por Desharnais *et al.* ([Des99], [DeEd02], [Dan06]) para extender los procesos discretos de la primera sección de manera que admitan un espacio infinito no numerable de estados.

El Capítulo 3 toma los LMPs y le añade la capacidad de expresar no determinismo interno, conformando los aquí llamados “NLMPs semi-estructurados” ([CeD09], [DSW11], [Wol12]). Se profundiza en el tema describiendo en detalle las tres nociones de bisimulación que existen para dichos procesos, la lógica que caracteriza a una de ellas, y se enuncian algunos de los resultados sobresalientes en el campo. La última sección del capítulo está dedicada a la exposición de dos NLMPs relativamente simples, que verifican que todas las bisimulaciones definidas difieren entre sí ([DSW11]).

El Capítulo 4 introduce la nueva definición propuesta para los procesos de Markov etiquetados no deterministas, a los que aquí se hace referencia bajo el nombre de NLMPs “estructurados” o “con estructura en las etiquetas”. Más adelante en la Sección 4.3 se prueba que la nueva noción descarta uno de los contraejemplos dados al final del Capítulo 3, en particular el que verifica la desigualdad entre las bisimulaciones tradicional y de estado para los procesos allí definidos.

En el Capítulo 5 se adaptan las tres nociones de bisimulación de los NLMPs semi-estructurados al nuevo modelo. Luego se reconstruyen, para las nuevas definiciones, algunos de los resultados enunciados en el Capítulo 3.

Finalmente el Capítulo 6 presenta una modificación de la lógica introducida en el Capítulo 3, que extiende su expresividad adecuándola al modelo con estructura en las etiquetas. Se prueba que dicha lógica caracteriza a la bisimulación más gruesa, y se demuestra que el segundo contraejemplo de Capítulo 3 no diferencia las bisimulaciones de estado y de evento dentro del nuevo modelo.

Se cierra el trabajo en el Capítulo 7 con las conclusiones y algunos comentarios sobre posibles investigaciones futuras. Además se incluyen tres apéndices: el Apéndice A extiende (someramente) los resultados en teoría de la medida incluidos en la Sección 2.4; el Apéndice B provee las demostraciones de algunos resultados auxiliares empleados a lo largo de todo el texto; el Apéndice C referencia un trabajo similar en el área, cuyos resultados se complementan con los nuestros.

Capítulo 2

Conceptos básicos

Aquí se describen brevemente diversos elementos de un conjunto de teorías, de los campos de la matemática y de la computación, que forman la base conceptual sobre la que se apoyan las construcciones y resultados del resto del trabajo.

Sobre matemática hablaremos de σ -álgebras, espacios Borel, medibilidad en general, producto cartesiano y σ -álgebras producto. Sobre computación repasaremos la base de la semántica de procesos (LTS, relación de bisimulación, lógicas caracterizadoras) y una relativamente reciente extensión de la misma al universo continuo debida al grupo de Joséé Desharnais en la Universidad McGill, Canadá.

2.1. Sistemas de Transición Etiquetados

La teoría de los sistemas de transición etiquetados, o LTS por sus siglas en inglés, es la más frecuentemente usada para modelar sistemas sencillos, con un espacio de estados discreto (finito o numerable) y con transiciones también discretas. La misma fue originalmente desarrollada por Milner allá por 1980, y actualmente se encuentra descrita en profundidad en numerosos libros y artículos. Una versión si se quiere más moderna de estos modelos puede hallarse en [BaiK08, p. 20].

Definición 2.1. Un *sistema de transición etiquetado*, también denominado *LTS*, es una tupla (S, L, \rightarrow) donde S es un conjunto finito o numerable de *estados*, L es un conjunto arbitrario de *etiquetas* (a veces llamadas *acciones*), y $\rightarrow \subseteq S \times L \times S$ es un conjunto de *transiciones*. En general para acortar notación se escribe $s \xrightarrow{a} s'$ en lugar de $(s, a, s') \in \rightarrow$.

Si el sistema es lo suficientemente simple lo usual es representarlo gráficamente. Como regla general podríamos decir que todo LTS con menos de 8 estados y donde no haya más de 4 flechas salientes de cada estado es “lo suficientemente simple”.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathbb{S} = (\{0, 1\}, \{a, b\}, \{(0, a, 1), (1, b, 0)\})$ un LTS. La Figura 2.1 representa gráficamente dicho sistema.

Resulta evidente que, en estos casos sencillos, el esquema del LTS permite adquirir una noción intuitiva de su naturaleza mucho más rápidamente que su descripción formal. Lo mismo ocurrirá con los considerablemente más complejos LMPs y NLMPs.

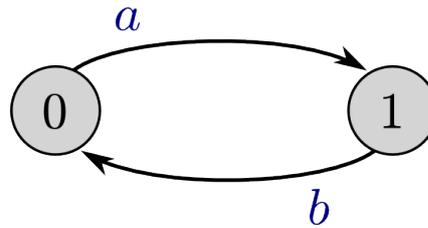


Figura 2.1: Esquema de un LTS muy simple

Repasemos la Figura 2.1 para entender mejor la dinámica de los LTS. En cada instante de tiempo el sistema se encuentra posicionado en alguno de sus estados, el *estado actual* del LTS. En la figura esto significa que en cada momento estamos parados o bien en el **0** o sino en el **1**.

Entonces el tiempo avanza en un paso, se ejecuta una acción y el estado del sistema cambia siguiendo las reglas impuestas por la relación de transición ‘ \rightarrow ’. En nuestro ejemplo si estábamos posicionados en el estado **0**, siguiendo la única transición con etiqueta *a* caeríamos en el estado **1**, y viceversa para la etiqueta *b*.

Inmediatamente surgen varios interrogantes. Por ejemplo ¿quién decide en qué estado se encuentra el LTS? Tampoco queda claro el fenómeno de la transición: ¿cómo es que transcurre el tiempo?, y ¿quién decide la etiqueta que será accionada? Por último suponemos que desde un estado *s* tenemos dos transiciones con la misma etiqueta que tienen diferentes estados destino, como se muestra en la Figura 2.2. Este tipo de disyuntivas tiene el nombre técnico de *no determinismo*. Entonces, ante una situación no-determinista como la de la Figura 2.2, si el entorno decide realizar la acción *a*, ¿cual de los dos caminos seguirá el sistema?

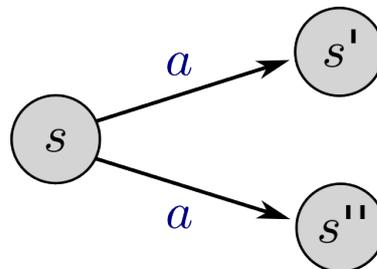


Figura 2.2: LTS no determinístico

Respecto de la primera pregunta, es usual que en la definición de los LTS se incluya un campo más en la estructura que denote el *estado inicial* del sistema. La tupla quedaría por ende de la forma (S, i, L, \rightarrow) , donde $i \in S$ es el estado inicial. Esa es precisamente la política empleada en [MaK06], [BaiK08] y [Des99], y también suele usarse en sistemas emparentados con los LTS como los grafos probabilísticos de [AnWi04] y los procesos markovianos no deterministas de [FräHa11]. Aquí no se discriminó dicho estado por ser irrelevante para el análisis que se planteará sobre los modelos.

Las preguntas sobre la naturaleza del *transcurrir* del tiempo y la elección de las etiquetas accionadas son mucho más profundas y sacan a la luz una de las principales características de los sistemas bajo estudio. En lo sucesivo se trabajará exclusivamente con

sistemas *reactivos*, cuya evolución está dictada por las acciones que elija (arbitrariamente para nosotros) realizar un entorno desconocido. Cuando el mismo decida llevar a cabo una transición adosada con cierta etiqueta específica, el sistema reaccionará sincronamente realizando la acción cuya etiqueta coincida con la elegida por el entorno. Para más información sobre los sistemas reactivos ver [Des99, p. 10].

Sólo nos queda por resolver la cuestión del no determinismo. Pero por definición no hay nada que decidir, puesto que el no determinismo ¡se decide solo! Si s es el estado actual de un sistema como el de la Figura 2.2 y el entorno decide realizar la transición etiquetada a , nada ni nadie puede predecir cual de los dos posibles será el siguiente estado actual del LTS. Esa es precisamente la idea del no determinismo: no se puede determinar qué ocurrirá luego. Ni siquiera se cuenta con una distribución de probabilidad que aclare el panorama, la incertidumbre acerca del futuro es total.

2.2. Bisimulación clásica

No es inusual que trabajando con los LTS uno se encuentre con dos sistemas de idéntico alfabeto y transiciones muy similares, y una pregunta surge naturalmente: ¿serán éstas dos representaciones del mismo proceso? O reformulando la pregunta para otorgarle mayor rigor matemático: ¿*tendrán estos sistemas el mismo comportamiento?*

Comienza así a surgir la noción de *bisimulación* de procesos. Intuitivamente uno diría que dos sistemas son bisimilares si se comportan de la misma manera. Notar que esto habla de forma exclusiva sobre el comportamiento externo del proceso, *observable* para el entorno.

Sin embargo dicha noción es insuficiente, existe un gran número de otras relaciones que también hablan sobre la igualdad de comportamiento entre sistemas. Para describir unívocamente la bisimulación es necesario ser mucho más específico, lo cual suele llevarse a cabo mediante una analogía lúdica.

Supongamos que tenemos dos LTS cuya bisimilitud queremos probar o refutar. El juego de la bisimulación comienza escogiendo a uno de ellos como “*el que propone*” y al otro como “*el que imita*”. Partiendo de su estado inicial, el primero propone realizar una transición etiquetada, digamos, con a . Entonces, también partiendo desde su estado inicial, el proceso que imita debe realizar una acción con la misma etiqueta. Si no cuenta con una transición etiquetada a que parta desde su estado actual se concluye que los LTS *no* son bisimilares. Si por el contrario el segundo proceso tiene éxito imitando la movida, los estados de los que se partió para realizar sendas transiciones a se proponen como bisimilares.

El juego entonces continúa de la misma forma desde los nuevos estados actuales de ambos LTS. Lo importante para la bisimulación es que a cada nuevo paso se vuelve a elegir cual de los procesos es el que propone y cual el que imita. En otras relaciones (como la de simulación) el proceso que propone es el mismo a lo largo de todo el juego; para la bisimulación sin embargo los roles de los LTS pueden cambiar arbitrariamente ante cada nueva transición.

Veamos ahora la formalización de estas ideas:

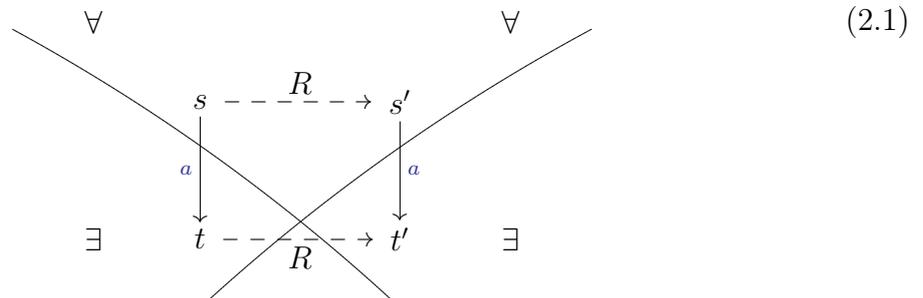
Definición 2.3. Sea (S, L, \rightarrow) un LTS. Una relación $R \subseteq S \times S$ es una *bisimulación* sii dados $(s, s') \in R$, para toda etiqueta $a \in L$ se cumple que: $s \xrightarrow{a} t \implies \exists t' \in S$ tal que $s' \xrightarrow{a} t'$ con $(t, t') \in R$, y viceversa.

Se dice que dos estados $(s, s') \in S \times S$ son bisimilares sii existe alguna relación de bisimulación que contenga dicho par. Dos LTS (S, L, i, \rightarrow) y $(S', L, i', \rightarrow')$ son bisimilares sii los estados iniciales i e i' son bisimilares en el LTS formado por su unión disjunta, o sea: $(S \uplus S', L, \rightarrow \uplus \rightarrow')$.

En lenguaje coloquial se dice que dos estados s y s' son bisimilares si s' puede imitar cualquier transición propuesta por s y viceversa, respetando siempre la relación. Es decir: ante cada propuesta de s de realizar la acción a imitada por s' , los nuevos estados actuales t y t' en los que queda cada LTS *también deben ser bisimilares*. Puede apreciarse aquí la transitividad inherente al concepto de bisimulación.

Para averiguar si dos LTS son bisimilares, primero se construye un nuevo sistema con ellos (simplemente considerando a ambos como dos partes un solo LTS) y a continuación se verifica si los dos estados iniciales son bisimilares. La naturaleza de la relación nos obligará a realizar un testeo de bisimilitud sobre todos los estados alcanzables desde ambos estados iniciales. Los sistemas serán bisimilares sii sus estados iniciales lo son.

Otra forma de presentar esta relación es mediante un diagrama conmutativo. Su principal utilidad es que, por ser gráfico, suele ser el formato más sencillo de recordar.



En el diagrama 2.1 los cuantificadores se asocian por lado. Es decir: el \forall de la izquierda se interpreta en conjunto con el \exists de la izquierda, y lo mismo con el lado derecho. El diagrama 2.1 debe leerse de la siguiente forma: para todo par de estados relacionados (s, s') , para toda transición $s \xrightarrow{a} t$, debe existir un estado t' relacionado con s' tal que $s' \xrightarrow{a} t'$. Eso cubre los cuantificadores de la derecha. Los de la izquierda expresan la misma idea pero en sentido análogo: es decir para todo par de estados $(s, s') \in R$ y toda transición $s' \xrightarrow{a} t'$.

Estrictamente hablando lo que acabamos de describir es comúnmente llamado *bisimulación fuerte*, distinguiéndose de su variante débil en que exige la bisimilitud de todas las transiciones del sistema: las externas (visibles, accionadas por el entorno) y las internas (invisibles para los usuarios pero distinguibles para el proceso) Como en este caso no consideramos la existencia de transiciones internas inobservables por el entorno, el concepto de bisimulación débil no aporta nada, y es por ello dejado de lado. Para más información sobre la dualidad bisimulación fuerte / bisimulación débil ver [Mil80]

Ejemplo 2.4. Veamos un caso concreto para fijar ideas. Sean \mathbb{S}, \mathbb{S}' los LTS de la Figura 2.3 Evidentemente ambos procesos aceptan el mismo lenguaje: $\{ab, ac\}$ ¿Serán a su vez bisimilares?

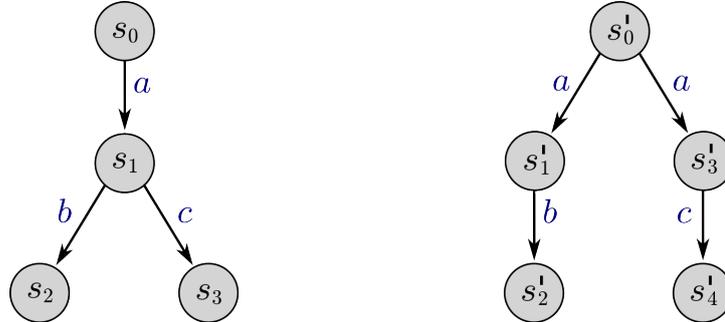


Figura 2.3: Dos LTS con el mismo alfabeto

Acabamos de decir que dos LTS serán bisimilares si sus estados iniciales lo son en el LTS formado por su unión. Supongamos, como parecería natural hacerlo, que s_0 y s'_0 son los estados iniciales de \mathbb{S} y \mathbb{S}' respectivamente. Necesitamos pues comprobar si $s_0 \sim s'_0$

Comencemos el juego haciendo que \mathbb{S} proponga la única transición que puede realizar: $s_0 \xrightarrow{a} s_1$. Para imitarlo \mathbb{S}' debe escoger entre saltar desde s'_0 hacia s'_1 o desde s'_0 hacia s'_3 . Ante lo primero \mathbb{S} propone realizar $s_1 \xrightarrow{c} s_3$, movida que \mathbb{S}' no podrá imitar pues no existe ninguna transición etiquetada con c saliente de s'_1 . Si \mathbb{S}' elige saltar hacia s'_3 entonces \mathbb{S} propone como segunda transición a $s_1 \xrightarrow{b} s_2$, repitiendo así el escenario anterior.

Puede verse entonces que $s_1 \not\sim s'_1$ y $s_1 \not\sim s'_3$. Como eso agota todas las posibilidades de estados de \mathbb{S}' que podrían llegar a ser bisimilares al s_1 de \mathbb{S} , lo que obtenemos es que s_0 y s'_0 no pueden efectuar transiciones hacia estados que mantengan alguna relación de bisimilitud. Según la definición eso indica que $s_0 \not\sim s'_0$, y por consiguiente puede concluirse que \mathbb{S} y \mathbb{S}' *no son bisimilares*.

Ejemplo 2.5. Los procesos de la Figura 2.4 son bisimilares. A continuación se presenta la relación $R \subseteq (S \uplus S') \times (S \uplus S')$ que lo demuestra:

$$R = \{(s_0, s'_0), (s_1, s'_1), (s_1, s'_3), (s_2, s'_2), (s_2, s'_4), (s_3, s'_4)\}$$

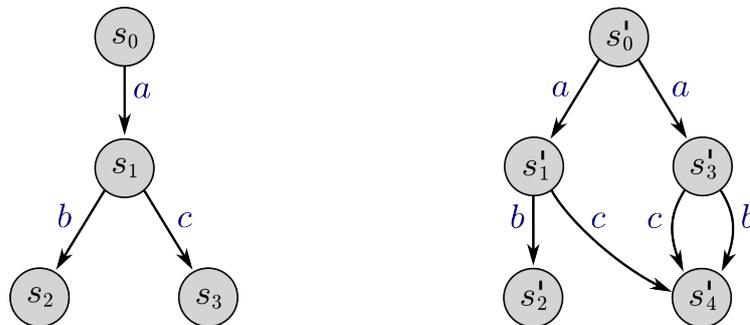


Figura 2.4: Dos LTS bisimilares

2.3. Lógica Hennessy-Milner

Uno de los aspectos más interesantes de la relación de bisimulación es que se encuentra caracterizada por una lógica modal introducida por Hennessy y Milner hace más de dos décadas ([HeMi85]). Eso significa que dos estados serán bisimilares si satisfacen las mismas fórmulas.

La lógica de la que estamos hablando tiene la siguiente sintaxis:

$$HML ::= \top \mid \neg\varphi \mid \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i \mid \langle a \rangle \varphi$$

La semántica de estas construcciones se define respecto de algún LTS (S, L, \rightarrow) . Cada fórmula de *HML* se interpreta como el conjunto de estados del LTS que la satisfacen. El significado de cada construcción básica está dado en el cuadro 2.1.

$$\begin{aligned} \llbracket \top \rrbracket &\doteq S \\ \llbracket \neg\varphi \rrbracket &\doteq \llbracket \varphi \rrbracket^c \\ \llbracket \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i \rrbracket &\doteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \llbracket \varphi_i \rrbracket \\ \llbracket \langle a \rangle \varphi \rrbracket &\doteq \left\{ s \in S \mid \exists t \in S . s \xrightarrow{a} t \wedge t \models \varphi \right\} \end{aligned}$$

Cuadro 2.1: Semántica de las fórmulas de *HML*

Notemos que la última definición nos está diciendo que “ $s \models \langle a \rangle \varphi$ si hay algún estado $t \in S$ que satisfaga φ al que puedo llegar desde s con una transición a ”. O dicho de otra forma: $\llbracket \langle a \rangle \varphi \rrbracket$ es el conjunto de estados que pueden hacer a y luego satisfacer φ .

Antes de continuar vale la pena remarcar una propiedad muy útil de esta lógica. Puesto que caracteriza a la relación de bisimulación, para probar que dos LTS *no* son bisimilares basta con hallar alguna fórmula de *HML* que sea satisfecha por uno y no por el otro. En el Ejemplo 2.4 la fórmula $\langle a \rangle \neg \langle c \rangle \top$ es satisfecha en \mathbb{S}' , pues se vuelve verdadera en el estado $s'_0 \in \mathbb{S}'$. Sin embargo ningún estado de \mathbb{S} satisface la fórmula, en particular s_0 . Esto reafirma el hecho de que dichos LTS no son bisimilares.

2.4. σ -álgebras y medibilidad

Como se mencionó en la introducción, una de las motivaciones del trabajo es desarrollar una teoría de semántica de procesos que pueda manejar un espacio de estados continuo. Para ello es necesario tener presentes algunos conceptos sobre topología y teoría de la medida que serán esenciales para manejar modelos de dicha naturaleza.

En lo sucesivo Ω será un conjunto arbitrario y 2^Ω hará alusión al conjunto de partes del mismo. Ω puede ser entonces finito, infinito numerable, continuo o infinito no numerable en general. Veremos más adelante que son realmente frecuentes los casos en los que resulta práctico escoger $\Omega = \mathbb{R}$.

Definición 2.6. Una σ -álgebra sobre Ω es una colección $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ que satisface:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $\forall i \in \mathbb{N}. \Omega_i \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i \in \mathcal{F}$

Si \mathcal{F} es una σ -álgebra sobre Ω , llamaremos *espacio medible* al par (Ω, \mathcal{F})

Ejemplo 2.7. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Algunas posibles σ -álgebras sobre Ω son:

- $\{\emptyset, \Omega\}$
- $\{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \Omega\}$
- $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \Omega\}$
- 2^Ω

Análogamente a la generación de subespacios vectoriales mediante una base de vectores en el álgebra lineal, el mundo de la teoría de la medida cuenta con las σ -álgebras generadas por colecciones $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$. La idea es sencilla: tomar todos los conjuntos contenidos en \mathcal{C} , añadir Ω si no estaba, y luego cerrar por complemento y uniones numerables. Cada elemento de \mathcal{C} se denomina *generador* y a \mathcal{C} se lo llama *conjunto generador*.

Existe una manera de formalizar el procedimiento anterior, cuya naturaleza facilita las pruebas de varios resultados útiles en el campo. La misma se presenta a continuación como definición formal de σ -álgebra generada; fue tomada de [Vaill, Tuto. 1].

Definición 2.8. Sea $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$. Llamaremos σ -álgebra generada por \mathcal{C} a la intersección de todas las σ -álgebras que contengan a \mathcal{C} , y la denotaremos por $\sigma(\mathcal{C})$. Es decir:

$$\sigma(\mathcal{C}) \doteq \bigcap \{ \mathcal{F} \subseteq 2^\Omega \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra} \}$$

Puede demostrarse que $\sigma(\mathcal{C})$ en efecto es una σ -álgebra, y que además posee la (muy útil) propiedad de ser la menor de las σ -álgebras que contienen a \mathcal{C} . Dicho de otra forma: si $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$ y Σ es una σ -álgebra, entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \Sigma$.

Hasta ahora se desarrolló brevemente el aspecto estructural de la teoría de la medida, pero aún no se habló acerca de su dinámica. Entonces bien, ¿qué se puede esperar de un conjunto arbitrario equipado con una σ -álgebra?, ¿cuál es el sentido detrás de las reglas que definen la construcción de dichas estructuras?

La respuesta puede llegar a ser confusa en un principio: los elementos de una σ -álgebra son justamente los que se pueden *medir*. Es por ello que se denomina *conjuntos medibles* a los integrantes de Σ cada vez que se trabaja con un espacio medible (Ω, Σ)

Definición 2.9. Sean $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$ con $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $\mu \in \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ una función. μ es una *medida* en \mathcal{C} si

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\biguplus_{i \in \mathbb{N}} C_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_i)$, donde $\forall i \in \mathbb{N}. C_i \in \mathcal{C}$ y $\biguplus_{i \in \mathbb{N}} C_i \in \mathcal{C}$

μ es una *medida de probabilidad* si además satisface:

- $\mu(\Omega) = 1$ (y por ende: $\mu \in \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$)

Entonces si (Ω, Σ) es un espacio medible, μ un medida en Σ , y A un medible en Σ (es decir: $A \in \Sigma$), la medida de A según μ será $\mu(A)$.

Es usual denotar con $\Delta(\Omega)$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre (Ω, Σ) . Asimismo existe una construcción estándar en [Gir81] para generar un espacio medible a partir de $\Delta(\Omega)$. La correspondiente σ -álgebra de *Giry* se denota $\Delta(\Sigma)$, y está definida como la σ -álgebra generada por la familia de conjuntos $\Delta^B(Q) \doteq \{\mu \mid \mu(Q) \in B\}$, donde $Q \in \Sigma$ y $B \in \mathcal{B}([0, 1])$. La estructura $\mathcal{B}([0, 1])$ es el *espacio Borel* sobre el intervalo $[0, 1]$. La definición formal de espacio Borel se da en la página 12, por ahora alcanzará con saber que $\mathcal{B}([0, 1]) \subseteq 2^{[0, 1]}$. Entonces, llamando $\Delta^{\geq p}(Q)$ al conjunto $\Delta^B(Q)$ con $B = [p, 1] \in \mathcal{B}([0, 1])$, puede probarse que la colección restringida de conjuntos $\{\Delta^{\geq p}(Q) \mid p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \wedge Q \in \Sigma\}$ también genera a $\Delta(\Sigma)$.

De entre la infinidad de medidas de probabilidad concebibles sobre \mathbb{R} , hay una de particular utilidad y de gran interés para este trabajo: se trata de la *delta de Dirac*, usualmente denotada δ . Aquí se habla con mucha frecuencia de la delta de Dirac centrada en algún punto $\omega \in \mathbb{R}$, y se la denota δ_ω . Informalmente δ_ω puede definirse como la única función que satisface:

$$\delta_\omega(x) = \begin{cases} +\infty & , \quad x = \omega \\ 0 & , \quad x \neq \omega \end{cases} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\omega(x) dx = 1$$

Esa no es una definición, y estrictamente hablando ninguna función sobre los reales podría presentar tales propiedades. En realidad es posible definir a δ_ω como medida y como distribución. En este trabajo sólo nos interesa la primera opción.

Definición 2.10. Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Para cada $\omega \in \Omega$ se define la *delta de Dirac centrada en ω* , denotada δ_ω , como la única distribución de probabilidad sobre (Ω, Σ) que para todo medible $Q \in \Sigma$ satisface:

$$\delta_\omega(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in Q \\ 0 & \text{si } \omega \notin Q \end{cases}$$

Así como arriba se habló brevemente sobre los conjuntos medibles, y aunque suene extraño al comienzo, el concepto de medibilidad también puede ser extendido al espacio de las funciones, introduciendo las denominadas *funciones medibles*.

Definición 2.11. Dados $(\Omega_1, \Sigma_1), (\Omega_2, \Sigma_2)$ espacios medibles, una función $f \in \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es una *función medible* sii

$$\forall B \in \Sigma_2 . f^{-1}(B) \in \Sigma_1$$

donde $f^{-1}(B)$ hace referencia a la imagen inversa de B para f

Otras construcciones algebraicas de gran popularidad son las llamadas *topologías*. Aquí no se trabajará con ellas directamente, pero serán introducidas para permitirnos hablar luego de los *espacios Borel* sin la necesidad de apelar a la imaginación del lector.

Definición 2.12. Una *topología* sobre Ω es una colección $\mathcal{T} \subseteq 2^\Omega$ que satisface:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$
- $A, B \in \mathcal{T} \implies A \cap B \in \mathcal{T}$
- $\forall i \in I . \Omega_i \in \mathcal{T} \implies \bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \mathcal{T}$

donde I es un conjunto arbitrario.

Si \mathcal{T} es una topología sobre Ω , el par (Ω, \mathcal{T}) será llamado *espacio topológico*.

Definición 2.13. Dado un espacio topológico (Ω, \mathcal{T}) , la σ -álgebra generada por la topología \mathcal{T} se denomina *σ -álgebra Borel* en Ω y se denota por $\mathcal{B}(\Omega)$. Es decir: $\mathcal{B}(\Omega) \doteq \sigma(\mathcal{T})$

Para cada conjunto Ω de gran popularidad en la comunidad matemática (v.g. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$, etc.) suele existir una topología denominada “la topología estándar de Ω ”. Por ejemplo la topología estándar de \mathbb{R} se define como:

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \doteq \{B \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in B . \exists \epsilon > 0 . (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq B\}$$

En general cuando más adelante trabajemos con algún ejemplo concreto se fijará el conjunto Ω y luego se hablará del *espacio Borel* a secas, haciendo referencia a $\mathcal{B}(\Omega)$, a veces denotado simplemente con \mathcal{B} . Si no es mencionada explícitamente, la topología sobre la que estará construido dicho espacio Borel será la estándar del conjunto fijado.

La última herramienta matemática que es necesario introducir define la construcción de nuevos espacios algebraicos a partir de otros preexistentes: es el producto cartesiano.

Definición 2.14. Sea $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de conjuntos (con n elementos). El *producto cartesiano* de la familia $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto:

$$\prod_{i=1}^n \Omega_i \doteq \left\{ \omega \in \{1..n\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^n \Omega_i \mid \forall i \in \{1..n\} . \omega(i) \in \Omega_i \right\}$$

Por tratarse de un producto finito también escribiremos:

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \doteq \prod_{i=1}^n \Omega_i$$

Notar que todo elemento $\omega \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ puede ser visto como la única n -tupla $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ que satisface: $\forall i \in \{1..n\} . \omega_i = \omega(i)$, donde ω_i hace referencia a la i -ésima componente de la n -tupla. Es decir que para el caso de una cantidad finita de conjuntos, los elementos del producto cartesiano no son más que tuplas ordenadas que contienen elementos de cada uno de ellos.

Hay otra notación muy usada en la teoría de los productos cartesianos. Si $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de conjuntos, y para cada $i \in \{1..n\}$ hay una colección $\mathcal{C}_i \subseteq 2^{\Omega_i}$, se denomina *rectángulo* de la familia $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^n$ a cualquier subconjunto $A \subseteq \prod_{i=1}^n \Omega_i$ de la forma

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \doteq \prod_{i=1}^n A_i$$

donde $\forall i \in \{1..n\} . A_i \in \mathcal{C}_i \cup \{\Omega_i\}$.

Definición 2.15. Sea $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i)\}_{i=1}^n$ una familia finita de espacios medibles. Un *rectángulo medible* es cualquier rectángulo de la familia $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^n$

Denotando con $\prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ al conjunto de todos los rectángulos medibles de $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^n$, se define la σ -álgebra *producto* como:

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i \doteq \sigma \left(\prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right)$$

Al igual que antes escribiremos:

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n \doteq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$$

2.5. σ -álgebras y relaciones

Dada una relación $R \subseteq S \times S$ es usual denominar $R(Q)$ al conjunto de elementos $\{y \in S \mid \exists x \in Q \text{ tal que } x R y\}$, donde $x R y$ equivale a decir $(x, y) \in R$. A su vez la condición $R(Q) \subseteq Q$ es comúnmente denotada con el término R -cerrado(Q), y a los conjuntos que la satisfacen se los denomina R -cerrados. Notar que si R es simétrica entonces:

$$R\text{-cerrado}(Q) \iff \forall s, t \in S . s R t \Rightarrow s \in Q \text{ sii } t \in Q$$

Dado un espacio medible (S, Σ) , para las relaciones simétricas R se define:

$$\Sigma(R) \doteq \{Q \in \Sigma \mid R\text{-cerrado}(Q)\} \tag{2.2}$$

Es posible verificar que $\Sigma(R)$ es una σ -álgebra, y en particular que es la sub- σ -álgebra de Σ que contiene todos los conjuntos que son a la vez R -cerrados y Σ -medibles.

El siguiente resultado es de gran utilidad para las construcciones de los capítulos siguientes. Establece que las situaciones de inclusión entre relaciones se invierten al considerar las colecciones $\Sigma(R)$ y $\Delta(\Sigma(R))$.

Proposición 2.16. Sean (S, Σ) un espacio medible, R y R' dos relaciones simétricas sobre S tales que $R \subseteq R'$. Entonces:

- I) $\Sigma(R) \supseteq \Sigma(R')$
- II) $\Delta(\Sigma(R)) \supseteq \Delta(\Sigma(R'))$

donde $\Delta(\Sigma)$ es la σ -álgebra de Giry sobre el espacio de medidas $\Delta(S)$.

Demostración. I) Sea Q un medible de Σ tal que R' -cerrado(Q), queremos ver que R -cerrado(Q). La simetría de R' asegura que todos los s, t que satisfagan $s R' t$ cumplen con la doble implicación $s \in Q \Leftrightarrow t \in Q$. Sean ahora $s, t \in S$ tales que $s \in Q$ y $s R t$. Dado que $R \subseteq R'$ entonces $s R' t$, y en consecuencia $t \in Q$. Esto demuestra que Q es R -cerrado, como queríamos ver. \checkmark

II) Dado que por hipótesis R' es simétrica, entonces $\Sigma(R')$ es una σ -álgebra, y por ende $\Delta(\Sigma(R'))$ está bien definida como σ -álgebra generada por la colección de conjuntos de medidas $\mathcal{C} = \{\Delta^B(Q) \mid Q \in \Sigma(R') \wedge B \in \mathcal{B}([0, 1])\}$. Ahora bien, como por el inciso I) $\Sigma(R') \subseteq \Sigma(R)$, entonces $\mathcal{C} \subseteq \Delta(\Sigma(R))$. Luego como $\Delta(\Sigma(R))$ es ella misma una σ -álgebra, y $\Delta(\Sigma(R'))$ es la menor de las σ -álgebras que contienen a \mathcal{C} , se sigue II) \checkmark ■

Dada $R \subseteq S \times S$ hay una forma de elevarla como relación de equivalencia en $\Delta(S)$. Si μ, μ' son medidas de probabilidad sobre (S, Σ) se dice que:

$$\mu R \mu' \quad \text{si y sólo si} \quad \forall Q \in \Sigma(R) . \mu(Q) = \mu'(Q)$$

Gracias a ello es posible definir el predicado R -cerrado sobre subconjuntos de medidas de $\Delta(S)$, al igual que se lo hizo para subconjuntos de S .

Hasta ahora vimos como puede definirse una nueva σ -álgebra a partir de una relación sobre el espacio de estados. También puede realizarse el camino inverso: usar una σ -álgebra Σ para definir una relación. Ésta se denota $\mathcal{R}(\Sigma)$ y dados $s, t \in S$ se la define como sigue:

$$s \mathcal{R}(\Sigma) t \quad \text{si y sólo si} \quad \forall Q \in \Sigma . s \in Q \Leftrightarrow t \in Q \quad (2.3)$$

La manera más natural de verlo es quizás la contrapositiva: dos estados están relacionados por $\mathcal{R}(\Sigma)$ sii no pueden ser separados por ningún conjunto medible. Es decir: si *no existe* $Q \in \Sigma$ que contenga a uno y no al otro.

A continuación se presenta una serie de propiedades que relacionan las dos construcciones principales introducidas en esta sección. Al igual que la Proposición 2.16 su utilidad se hará evidente en los capítulos subsiguientes. Las pruebas de estos resultados pueden hallarse en [Dan06].

Proposición 2.17. Sean (S, Σ) un espacio medible, R una relación simétrica sobre S y $\Xi \subseteq \Sigma$ una sub- σ -álgebra de Σ . Entonces:

- I) $\Xi \subseteq \Sigma(\mathcal{R}(\Xi))$
- II) $R \subseteq \mathcal{R}(\Sigma(R))$

III) Si las clases de equivalencia de R caen en $\Sigma \implies R = \mathcal{R}(\Sigma(R))$

IV) $\mathcal{R}(\Xi) = \mathcal{R}(\Sigma(\mathcal{R}(\Xi)))$

V) $\Sigma(R) = \Sigma(\mathcal{R}(\Sigma(R)))$

Para más información sobre relaciones, σ -álgebras y teoría de la medida referirse al Apéndice A.

2.6. Procesos markovianos Etiquetados

2.6.1. Sistema de transiciones

La introducción de los conceptos descritos en la sección anterior dentro del mundo de los grafos y los sistemas de transición enriquece la teoría de semántica de procesos otorgándole una expresividad mucho mayor.

Tal vez los principales aportes sean:

- ▷ extender el espacio de estados a conjuntos continuos,
- ▷ permitir el uso de medidas de probabilidad para describir el comportamiento de los procesos con dichos espacios de estados.

Considérese por ejemplo el caso de una represa hídrica con cierto número de compuertas y un sistema de control digital. Este último se encarga de mantener la presión de agua del dique artificial por debajo del umbral tolerado, para lo cual abre o cierra progresivamente las compuertas de la presa. Para modelar un sistema de esta naturaleza es necesario incluir la presión de agua dentro del espacio de estados, lo que requiere de la manipulación de variables de tipo continuo.

Las medidas de probabilidad también son componentes usuales de las teorías que describen el comportamiento de sistemas físicos reales. Basta con considerar los procesos de Poisson, empleados para modelar un sinnúmero de fenómenos naturales. Por ejemplo: el decaimiento de muestras radiactivas, la emisión de electrones por un filamento incandescente, etc. Todos los procesos de este tipo cuentan con una o muchas variables aleatorias, cada una con su correspondiente distribución de probabilidad asociada. Por ende, si se desea modelarlos, la teoría utilizada debe incluir el concepto de distribuciones de probabilidad, junto con las herramientas matemáticas típicas que permiten trabajar con ellas.

En general los procesos de Markov¹ con espacio de estados continuo, o evolución temporal continua (o ambos), pueden hallarse en gran cantidad de sistemas físicos, biológicos, económicos, y de la ciencia de la computación ([CeD09, sec. 1]).

En este marco se introduce el concepto de proceso markoviano etiquetado (*LMP* por sus siglas en inglés; [Des99], [DeEd02], [Dan06]) como un modelo que añade con simplicidad y gran solidez matemática las ventajas que acabamos de mencionar al universo de los sistemas de transición.

¹una generalización de los procesos de Poisson

Definición 2.18. Sean (S_1, Σ_1) y (S_2, Σ_2) un par de espacios medibles. Una función $f \in S_1 \times \Sigma_2 \rightarrow [0, 1]$ será llamada *transición de probabilidad* si

- para todo $s_1 \in S_1$, $f(s_1, \cdot)$ es una medida de probabilidad en Σ_2 , y
- $\forall Q_2 \in \Sigma_2$. $f(\cdot, Q_2)$ es una función medible.

Recordemos que $\Delta(S)$ denota al conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre el espacio medible (S, Σ) . Supóngase que $f \in S_1 \times \Sigma_2 \rightarrow [0, 1]$ considerada como $f(s, \cdot)$ es una medida de probabilidad en Σ_2 para todo $s \in S_1$ (una suposición para nada ambiciosa por lo demás) Entonces puede probarse que $f \in S_1 \rightarrow \Delta(S_2)$ es medible sí y sólo si $f(\cdot, Q) \in S_1 \rightarrow [0, 1]$ es medible para todo $Q \in \Sigma_2$ (ver Apéndice B, Lema B.1).

Esto permite renombrar a las transiciones de probabilidad como aquellas funciones $f \in S_1 \rightarrow \Delta(S_2)$ medibles según los espacios (S_1, Σ_1) y (S_2, Σ_2) . Notar que, mirándolas de ese modo, dichas transiciones son funciones que toman un estado y devuelven una medida de probabilidad. Este ángulo de estudio es el preferido por el autor del trabajo, y por ende a lo largo del mismo muchas veces se encontrarán expresiones como: $\tau_a(s) = \mu$, donde τ_a es una transición, s es un estado y μ una medida de probabilidad.

Definición 2.19. Un *proceso markoviano etiquetado*, también llamado *LMP*, es una tupla $(S, \Sigma, L, \{\tau_a \mid a \in L\})$ donde (S, Σ) es un espacio medible y para cada etiqueta $a \in L$ la función $\tau_a \in S \times \Sigma \rightarrow [0, 1]$ es una transición de probabilidad. En ocasiones el conjunto L de etiquetas es prefijado y el LMP se denota en su formato abreviado: (S, Σ, L, τ)

Para reforzar la teoría con un caso concreto estudiemos un LMP muy sencillo con un (pequeño) espacio de estados finito. Al igual que con los LTS, existe una forma de diagramar los LMP que acelera y facilita el entendimiento general de su semántica. Naturalmente dicha esquematización será factible siempre y cuando el sistema modelado sea lo suficientemente simple, lo cual por desgracia impone límites no muy lejanos.

Ejemplo 2.20. El espacio de estados será $S \doteq \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ y la σ -álgebra asociada $\mathcal{B}(S)$, lo que en este caso (y en todos aquellos con un espacio de estados finito) es igual a 2^S . El conjunto de etiquetas será $L \doteq \{a, b, c, d\}$. Por último definiremos las transiciones como sigue:

$$\begin{array}{ll} \tau_a(s_0) \doteq \mu & \text{donde } \mu \text{ está dada por: } \mu(\{s_1\}) = 1/4 \\ \tau_b(s_1) \doteq \delta_{s_0} & \mu(\{s_2\}) = 2/3 \\ \tau_c(s_2) \doteq \delta_{s_0} & \mu(\{s_3\}) = 1/12 \\ \tau_d(s_3) \doteq \delta_{s_0} & \end{array}$$

Como se mencionó con anterioridad, δ_s es la delta de Dirac centrada en $s \in S$.

Existe más de una forma de esquematizar este sistema; en la Figura 2.5 se presenta la alternativa escogida para este trabajo. La elección siguió dos principios: escalabilidad y simplicidad. Por un lado hablar abstractamente de una medida cuya especificación se encuentra separada del diagrama (i.e. μ) permite esquematizar sistemas con un espacio de estados incluso no-numerable. Además dicha abstracción minimiza el número de flechas del dibujo, facilitando su comprensión.

Otra alternativa muy popular es el método con el que comúnmente se diagraman los *sistemas de transición etiquetados probabilísticos*. Dicho modelo y su forma de representación pueden hallarse descriptos en profundidad en [LaS91].

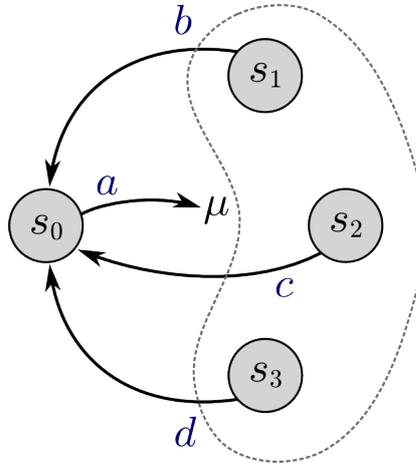


Figura 2.5: Diagrama del LMP finito del Ejemplo 2.20

Recuérdese que si el estado actual del sistema es s_0 y el entorno decide realizar la acción a , entonces existe una probabilidad igual a $\frac{1}{4}$ de caer en s_1 , igual a $\frac{2}{3}$ de caer en s_2 , e igual a $\frac{1}{12}$ de caer en s_3 .

Algunas preguntas que un modelo de esta naturaleza puede responder son: ¿cual de entre las etiquetas $\{b, c, d\}$ será la más seleccionada en una corrida de n transiciones?, ¿que probabilidad hay de que se ejecute la traza $abacad$?, etc.

A continuación se presenta un segundo ejemplo que despliega todo el poder descriptivo del que es capaz un LMP. Un aspecto positivo del mismo es que, al menos en teoría, describe un elemento de la vida cotidiana de suma importancia en estos tiempos tan calurosos: un aparato de aire acondicionado.

Ejemplo 2.21. El modelo básico de funcionamiento de un aire acondicionado tradicional está representado en la Figura 2.6, y puede describirse de la siguiente manera: cuando el aparato se enciende, el motor se encuentra desactivado y lo primero que hace es activar sus sensores para determinar la temperatura a la que se encuentra el cuarto (“sensar” la temperatura). Si ésta es inferior a cierto límite prefijado, el motor se mantiene desactivado. Posteriormente se volverá a sensar, y así sucesivamente hasta que se detecte una temperatura ambiente superior al límite, en cuyo caso se activa el motor.



Figura 2.6: Esquema abstracto de un aire acondicionado

En cuanto a la activación del motor, existen al menos dos políticas conocidas. En la primera el mismo permanece en funcionamiento constante hasta que el sensor indique

que la temperatura ambiente cayó por debajo del límite prefijado, y sólo entonces se lo desactiva.

La segunda política suele ser más ahorrativa en el consumo de energía, lo que consigue regulando de antemano los períodos de tiempo por los que el motor entrará en funcionamiento ininterrumpido. Cuando el sensor descubre que la temperatura ambiente supera el límite, activa el motor por un tiempo fijo cuya longitud depende proporcionalmente de la distancia entre ambos valores. Este modo operativo es el que se modela a continuación.

Antes de describir formalmente los componentes del LMP, introduciremos algunas definiciones que luego permitirán acortar la notación:

$$\begin{aligned}
 T &\doteq [\min, \max] \subseteq \mathbb{R} \\
 \min &\doteq 5 \quad ; \quad \max \doteq 50 \quad ; \quad \mathbf{t} \in T \\
 Cool &\doteq \{30s, 45s, 60s, 90s, 120s\} \\
 p \in T &\rightarrow Cool, \text{ donde:} \\
 p(t) &= \begin{cases} 30s & \text{si } t \in [\min, 17) \\ 40s & \text{si } t \in [17, 27) \\ 60s & \text{si } t \in [27, 35) \\ 90s & \text{si } t \in [35, 40) \\ 120s & \text{si } t \in [40, \max] \end{cases}
 \end{aligned}$$

T representa el rango de temperatura en el que opera el aparato (en °C), y $Cool$ es la cantidad de tiempo (en segundos) que el motor entra en funcionamiento ininterrumpido, lo que hace cada vez que detecta una temperatura ambiental por encima del límite prefijado $\mathbf{t} \in T$.

Ahora sí, ya es tiempo de presentar el espacio de estados y los demás componentes del sistema. La σ -álgebra usada es la Borel estándar sobre S , y el espacio de etiquetas es continuo, lo que da una idea de la complejidad de los comportamientos esperables.

$$\begin{aligned}
 S &\doteq (\{s, d, a\} \times T) \uplus \{\text{ON}\} \\
 \Sigma &\doteq \mathcal{B}(S) \\
 L &\doteq \{\text{encender}\} \uplus \{\text{sensar}_t, \text{desactivar}_t, \text{activar}_{p(t)} \mid t \in T\} \\
 \tau : &\begin{cases} \tau_{\text{encender}}(\text{ON}) \doteq \mathcal{U}(\{d\} \times T) \\ \tau_{\text{desactivar}_t}((s, t)) \doteq \delta_{(d,t)} & \text{si } t < \mathbf{t} \\ \tau_{\text{activar}_{p(t)}}((s, t)) \doteq \delta_{(a,t)} & \text{si } t \geq \mathbf{t} \\ \tau_{\text{sensar}_t}((d, t)) \doteq \delta_s \times \mu_t \\ \tau_{\text{sensar}_t}((a, t)) \doteq \delta_s \times \nu_t \\ \tau_b(x) \doteq \emptyset & \text{para todo otro } x \in S, b \in L \end{cases}
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \{s\} \times T &\doteq \text{estado del sistema cuando se sensó la temperatura} \\ \{d\} \times T &\doteq \text{estado del sistema cuando se desactivó el motor} \\ \{a\} \times T &\doteq \text{estado del sistema cuando se activó el motor} \\ \mathcal{U}(X) &= \text{distribución uniforme sobre el conjunto } X \subseteq S \\ \forall t \in T. \forall x \in \mathbb{R} &\begin{cases} \mu_t(x) = B_{\beta=8}^{\alpha=2}(x - 0,1 + t) \\ \nu_t(x) = B_{\beta=2}^{\alpha=8}(x - 0,9 + t) \end{cases} \end{aligned}$$

La función B_{β}^{α} representa la distribución de probabilidad *Beta* con los parámetros α y β especificados. Las gráficas de las funciones densidad de μ_t y ν_t pueden verse en las figuras 2.7 (a) y (b) respectivamente.

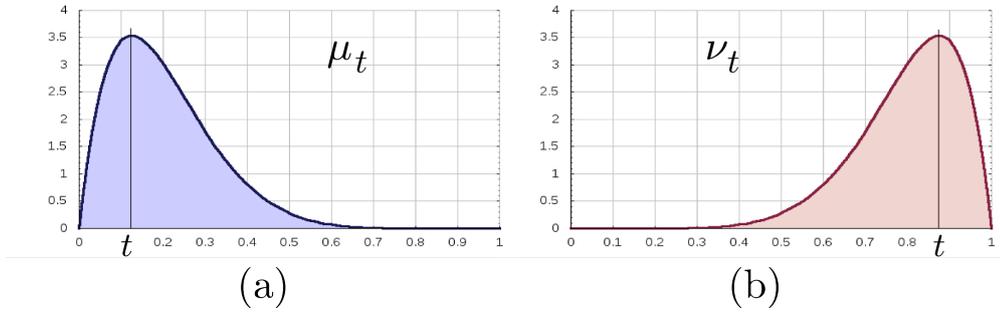


Figura 2.7: Función densidad de la distribución de probabilidad Beta para distintos parámetros

Al menos desde el punto de vista del autor, este sistema es lo suficientemente complejo como para requerir ambos un diagrama y una explicación verbal de su dinámica, sin las cuales todo intento por entender su funcionamiento sería sumamente tedioso, por no decir espantosamente doloroso.

Así que bien, lo prometido es deuda, y en la Figura 2.8 el lector puede apreciar un diagrama del sistema tan simplificado como fue posible generarlo. Éste presenta una serie de transiciones que bosquejan un comportamiento hipotético del LMP, el cual se describe a continuación.

El estado inicial del LMP es ‘ON’. Como la única transición que puede realizar desde allí es la etiquetada con ‘*encender*’, ante la primera acción del entorno el sistema reaccionará ejecutando ‘*encender*’ y sorteando una variable aleatoria de distribución uniforme en el rango T adosado al estado d . En el diagrama este rango está representado por la barra graduada de la izquierda, próxima a la letra d rodeada con un círculo.

Supóngase que la temperatura muestreada es $t \in T$. La definición de τ dice que desde d solamente puede accionarse la etiqueta ‘*sensar_t*’ para el ‘ t ’ seleccionado. Así que nuevamente el entorno tomará partido, y el LMP reaccionará ejecutando ‘*sensar_t*’. Esto lo lleva a sortear una v.a. con distribución μ_t en el rango T adosado al estado s . La distribución de probabilidad en cuestión fue esquematizada con una línea de trazo grueso

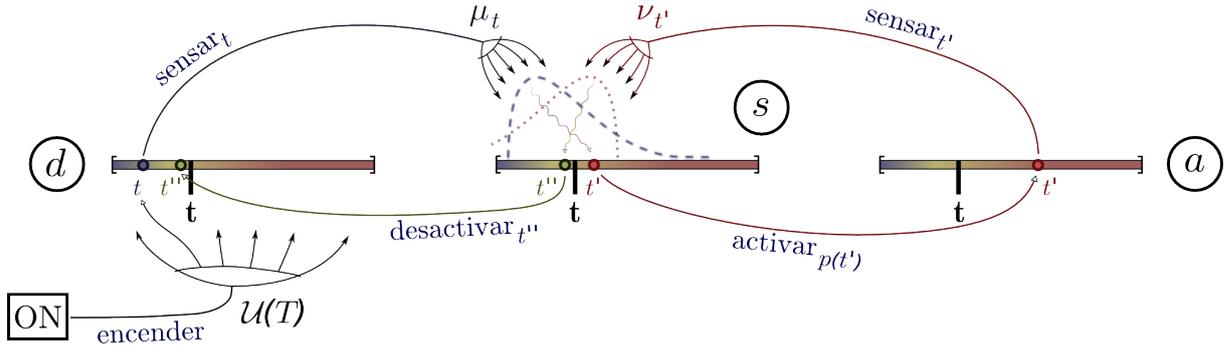


Figura 2.8: LMP del sistema descrito en el Ejemplo 2.21

y entramado interrumpido. Tiene forma de colina con cola hacia la derecha, y se encuentra ubicada sobre el continuo de estados al que se está moviendo el sistema.

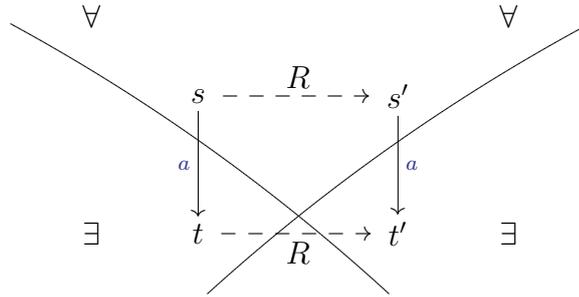
Supóngase ahora que la nueva temperatura muestreada, t' , cae por encima del umbral t que se había fijado. Entonces la definición de τ indica que la única transición habilitada para accionarse es la etiquetada con 'activar $_p(t')$ '. Así que otra acción del entorno lleva al LMP al nuevo estado (a, t') , seleccionado por $\delta_{(a,t')}$ a través de la transición mencionada.

Desde allí el sistema reacciona ejecutando la acción etiquetada 'sensar $_t'$ ', y al sortear la v.a. correspondiente con distribución $\nu_{t'}$ resulta seleccionada una temperatura t'' que cae por debajo del umbral t . Al sistema entonces se le deshabilitan las transiciones 'activar', y en su lugar se habilitan las 'desactivar'. La siguiente acción del entorno dispara la ejecución 'desactivar $_t''$ ', transformando a (d, t') en el nuevo estado actual del proceso. Y así podría continuarse indefinidamente.

El salto de complejidad entre el ejemplo anterior y éste trae aparejado una importante ventaja: la cantidad de información que se puede extraer del modelo. Un par de preguntas que se le podrían realizar a un LMP de esta naturaleza son: ¿cómo varía la cantidad de tiempo que el motor se encuentra desactivado en función del umbral de temperatura t escogido?, para cierto t fijo, ¿llegará a sensarse alguna temperatura $t \geq t + cte$ en las primeras n transiciones?, etc.

2.6.2. La nueva bisimulación

La relación de bisimulación entre LTS captura una noción de gran interés para la teoría de semántica de procesos, y por ello es natural intentar extenderla al campo de los LMP. Por fortuna con un poco de trabajo esto puede llevarse a cabo sin mayores trabas. Primero recordemos el diagrama 2.1 de la Sección 2.2:



Los LMP presentan una diferencia importante: ellos trabajan con transiciones de probabilidad, las que devuelven una medida de probabilidad sobre (S, Σ) en lugar de llevar al sistema hacia un estado determinado.

Eso sugiere un camino: reemplazar en el diagrama los estados t y t' por medidas de probabilidad μ y μ' respectivamente, y las etiquetas a por transiciones τ_a , dejando el resto tal cual estaba. Por desgracia carece de sentido comparar etiquetas y transiciones de probabilidad individuales, ya que eso genera una relación mucho más fina de lo buscado (ver [Dan06, p. 508, sec. 4]) ¿Como asociar entonces los estados?

La bisimulación en sistemas estocásticos fue introducida originalmente por [LaS91] en el marco de los (discretos) sistemas de transición etiquetados probabilísticos. Añadiendo de manera correcta algunas nociones de medibilidad es posible transportarla a los procesos markovianos etiquetados.

En [DeEd02] puede hallarse un abordaje directo al problema, pero allí se centran en el aspecto categórico de los LMP, y presentan la bisimulación en términos de morfismos entre los sistemas. En [Dan06] en cambio se introduce la noción de *estados bisimilares* a través de una relación dada de forma explícita, y que involucra a la σ -álgebra del sistema. Dicha visión se adecúa mucho mejor a este trabajo, y es la que se presenta en las líneas siguientes.

El escenario típico involucra dos estados cuya bisimilitud se desea comprobar. Se fija una etiqueta y luego se procede a comparar las medidas de probabilidad asociadas con cada estado. Para llevar a cabo dicha comparación Danos *et al.* utilizan conjuntos medibles y R -cerrados (i.e. los elementos de $\Sigma(R)$), donde R es la relación de bisimulación propuesta. Entonces, para que los estados s y t sean bisimilares, la regla que se debe cumplir es:

$$s R t \implies \forall Q \in \Sigma(R) . \tau_a(s)(Q) = \tau_a(t)(Q)$$

Como $\tau_a(s)$ y $\tau_a(t)$ son medidas de probabilidad, la Sección 2.5 ofrece una notación abreviada para la cuantificación anterior: $\tau_a(s) R \tau_a(t)$. La formalización de estos razonamientos se conoce bajo el nombre de *bisimulación de estados*, y se define como sigue:

Definición 2.22. Una relación $R \subseteq S \times S$ es una *bisimulación de estado* en un LMP $(S, \Sigma, L, \{\tau_a \mid a \in L\})$ si es simétrica² y para todo par de estados $s, t \in S$ y etiqueta $a \in L$ se cumple que $s R t \implies \tau_a(s) R \tau_a(t)$.

Se dice que $s, t \in S$ son *estados bisimilares*, denotado $s \sim_s t$, sii existe alguna bisimulación de estado R tal que $s R t$.

²esto es necesario para asegurar que $\Sigma(R)$ sea una σ -álgebra

Hay un ligero inconveniente con la bisimulación de estado: se encuentra definida punto a punto en S , mientras que los LMP trabajan con conjuntos medibles de estados (a veces también denominados *eventos*). Es decir que la bisimulación como fue definida trabaja directamente con los estados puntuales de S , lo cual puede resultar un tanto extraño para una teoría cuya atención está enfocada en la medibilidad.

Ese no es el único aspecto cuestionable de la Definición 2.22. Nótese que R no tiene restricciones de medibilidad, nada impide que sus clases de equivalencia sean conjuntos no medibles. Esto oscurece el panorama, pues podría abrir paso a algún ejemplo poco grato.

Danos *et al.* en [Dan06] atacan estos problemas, y definen una nueva relación de bisimulación que soluciona las patologías mencionadas. La denominan *bisimulación de evento*, para poner énfasis en su característica distintiva: considera a la medibilidad por sobre todas las otras propiedades del sistema.

Definición 2.23. Una *bisimulación de evento* en un LMP $(S, \Sigma, L, \{\tau_a \mid a \in L\})$ es una sub- σ -álgebra $\Xi \subseteq \Sigma$ para la cual el sistema $(S, \Xi, L, \{\tau_a \mid a \in L\})$ también es un LMP.

Puede verse como esto reemplaza a $\Sigma(R)$ por una sub- σ -álgebra arbitraria $\Xi \subseteq \Sigma$. El aspecto clave radica en que las transiciones de probabilidad τ_a deben presentar las propiedades de medibilidad apropiadas respecto de Ξ .

Danos *et al.* denominan bisimulación de evento tanto a la sub- σ -álgebra de Σ como a la relación $\mathcal{R}(\Xi)$ por ella inducida. Esto permite usar una notación similar a la empleada en el caso de la bisimulación de estado: se dice que $s, t \in S$ son *bisimilares por eventos*, denotado $s \sim_e t$, si existe alguna bisimulación de evento Ξ tal que $s \mathcal{R}(\Xi) t$.

Es importante mencionar que las dos nociones de bisimulación introducidas no son independientes. Todo lo contrario: hay un gran número de enunciados que formalizan los vínculos existentes entre ellas. Por ejemplo, es posible demostrar que R es una bisimulación de estado si y sólo si la sub- σ -álgebra $\Sigma(R)$ es una bisimulación de evento. Ese resultado y muchos otros poseen una versión equivalente dentro del nuevo modelo desarrollado en este trabajo. Es pues en las páginas siguientes donde se los discutirá en detalle.

2.7. Resumen

En este capítulo se dio un pantallazo sobre los conceptos matemáticos esenciales que permiten construir el principal objeto de estudio del trabajo. Estos incluyen nociones básicas de σ -álgebras, medibilidad, topologías y productos cartesianos, y también algunos conceptos levemente más complejos como la Proposición 2.17 y la definición de σ -álgebra producto.

Además se mencionaron los aspectos clave de la semántica de procesos, mediante los conceptos de LTS, bisimulación clásica y la lógica de Hennessy-Milner. Finalmente se combinaron ambos campos (el matemático y el computacional) para introducir el modelo de los LMP.

Toda esta información conforma un marco teórico lo suficientemente completo como para añadir a los LMP la capacidad de trabajar con no determinismo interno. Esta extensión se cristaliza en el concepto de NLMP, el cual se presenta en los capítulos siguientes.

Capítulo 3

NLMP: un enfoque semi-estructurado

Aquí se presenta un modelo de sistemas de transición que mantiene las generalizaciones de los LMP (cantidad no numerable de estados, σ -álgebras, varias acciones por estado) al tiempo que añade un aspecto de sumo interés: la capacidad de expresar no determinismo interno. Se siguen para ello las líneas generales ya trazadas sobre el tema en [CeD09], [FräHa11] y [DSW11].

3.1. Concepto

Los LMP introducidos en el capítulo anterior le deben su nombre a la similitud existente entre su teoría y la de los procesos (estacionarios) de Markov. La relación entre ambos conceptos es de inclusión: los segundos asocian una única medida de probabilidad a cada elemento de su espacio de estados; los procesos markovianos etiquetados en cambio permiten varias transiciones de probabilidad por cada estado del sistema. Es decir que los LMP generalizan a los procesos estacionarios de Markov.

Tomemos un LMP cualquiera $\mathbb{S} = (S, \Sigma, L, \{\tau_a \mid a \in L\})$, y algún estado $s \in S$. Cada transición de probabilidad τ_a que parta de s es una medida de probabilidad sobre (S, Σ) , y cada una de ellas puede ser identificada por una única etiqueta $a \in L$.

Ahora bien, rememorando la Figura 2.2 puede verse que este modelo carece de un aspecto muchas veces presente en la semántica de procesos: el no determinismo interno. En un LMP cada transición de probabilidad se determina unívocamente con una etiqueta. Fijada ésta, el sistema se dispone a cambiar su estado actual, donde la dinámica de dicha evolución está regida por una medida de probabilidad. Estos dos pasos describen la evolución de los LMPs, y son determinístico el primero y estocástico el segundo. El no determinismo no fue incluido en la teoría.

Esta omisión tiene sus desventajas, considerando el gran número de sistemas en los que dicho concepto juega un papel crucial. Tomemos por ejemplo la bisimulación débil de [Mil89]: la abstracción de las transiciones internas puede generar un comportamiento observable no determinista. Otro caso conocido donde se advierten acciones de esa naturaleza lo plantean las técnicas de abstracción de procesos, como el model checking ([BaiK08]).

A pesar de estos problemas, el modelo generado por Desharnais *et al.* tiene el gran atractivo de estar construido sobre conceptos matemáticos muy desarrollados y sobre todo bien conocidos por la comunidad científica. Sería deseable mantener estas ventajas y al mismo tiempo suplir la carencia mencionada.

Es en este espíritu que surgen los *procesos markovianos etiquetados no deterministas*, o NLMP por sus siglas en inglés. La idea principal es reemplazar las transiciones de probabilidad τ_a , generalizándolas con otra familia de funciones también indexada por las acciones. Así habrá una función T_a por cada etiqueta $a \in L$, la cual asocia a cada estado *un conjunto medible de medidas de probabilidad* sobre el espacio medible del sistema. Con esto puede probarse que los NLMP generalizan correctamente a los LMP.

Cabe mencionar que éste no es el primer intento por incluir no determinismo interno en el universo de los procesos markovianos continuos. Sin embargo los modelos anteriores a los NLMP carecen de la estructura requerida para asegurar que procesos bisimilares comparten un mismo comportamiento observable. El problema se presenta cuando se poseen dos sistemas potencialmente bisimilares, en los que uno de ellos falla a la hora de definir una ejecución probabilística, debido a que la relación de transición no es un objeto medible. Para mayor información ver [DSW11].

Cada uno de los aspectos que conforman al modelo de los NLMP o bien sigue los lineamientos de la teoría de los LMP, o sino fue motivado por casos concretos que atestiguan su necesidad. La justificación de la Definición 3.1 se posterga para el Capítulo 4, donde se redefine la estructura. Más específicamente es en la Sección 4.1 donde se encuentran las motivaciones principales.

Se dijo ya que toda *función de transición no determinista* T_a mapea cada estado en un *conjunto medible* de medidas de probabilidad, donde la σ -álgebra asociada a $\Delta(S)$ es $\Delta(\Sigma)$. Con esto en mente veamos la definición formal de estos sistemas.

Definición 3.1. Un *proceso markoviano etiquetado no determinista*, también llamado *NLMP*, es una tupla $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ donde (S, Σ) es un espacio medible, y para cada $a \in L$ la función $T_a \in S \rightarrow \Delta(\Sigma)$ es medible.

Como lo indica el título del capítulo, parte de los componentes de estos sistemas no poseen una estructura asociada. Más adelante en el trabajo se trata con otro tipo de NLMP que posee una σ -álgebra asociada al conjunto de sus etiquetas. Para distinguir ambos conceptos, en los capítulos siguientes se usará el término *NLMP semi-estructurados* para referirse a los procesos que satisfagan la Definición 3.1.

Nótese ahora que $\Delta(\Sigma)$ no es suficiente para la definición dada. Esto se debe a que, para cada $a \in L$, T_a tiene como codominio a $\Delta(\Sigma)$, y se exige que dicha función sea medible. Según la Definición 2.11 esto requiere de la existencia de una σ -álgebra sobre $\Delta(\Sigma)$. Es decir: una σ -álgebra construida sobre otra σ -álgebra.

La estructura escogida para añadir medibilidad a $\Delta(\Sigma)$ es un concepto clave para las definiciones y resultados que siguen. Se trata de la σ -álgebra de impactos $H(\Delta(\Sigma))$.

Definición 3.2. $H(\Delta(\Sigma))$ es la menor σ -álgebra que contiene a los conjuntos:

$$H_\xi \doteq \{\zeta \in \Delta(\Sigma) \mid \zeta \cap \xi \neq \emptyset\}$$

donde $\xi \in \Delta(\Sigma)$.

Notar que los elementos de H_ξ , al igual que los de $\Delta(\Sigma)$, son conjuntos medibles de medidas de probabilidad sobre (S, Σ) . En cambio $H(\Delta(\Sigma))$ está un escalón más arriba en la cadena de abstracción, y por ende sus elementos son conjuntos medibles de conjuntos medibles de medidas de probabilidad.

Esta construcción se denomina σ -álgebra de impactos porque sus generadores, los conjuntos H_ξ tal que $\xi \in \Delta(\Sigma)$, contienen a todos los conjuntos medibles que ‘impactan’ al conjunto ξ . Notar que la imagen inversa de un generador a través de una transición, es decir $T_a^{-1}(H_\xi)$, es el conjunto de todos los estados $s \in S$ tales que, a través de la etiqueta a , ‘impactan’ al conjunto de medidas ξ (es decir: $T_a(s) \cap \xi \neq \emptyset$).

Suficiente teoría por el momento, ya es hora de introducir un par de ejemplos para ir ayudando a la intuición.

Ejemplo 3.3. El primer NLMP que veremos cuenta con un espacio de estados continuo y un conjunto discreto de etiquetas. A primera vista se asemeja mucho a los ya conocidos LMPs, pero hay un detalle que lo hace trascender de esa teoría: una de sus transiciones no es determinista, i.e. tiene dos medidas de probabilidad asociadas.

A continuación se detallan formalmente los componentes del sistema, y luego se muestra una representación gráfica del mismo, de la misma forma que ya se hizo para los LTS y los LMP.

$$\begin{aligned}
 S &\doteq \{i\} \uplus (\{I, II, III, IV\} \times [0, 1]) \\
 \Sigma &\doteq \mathcal{B}(S) \\
 L &\doteq \{e\} \uplus \{a_t, d_t, s_t \mid t \in [0, 1]\} \\
 T_e(i) &\doteq \{\delta_i \times \mathcal{U}([0, 1])\} \\
 T_{s_t}(I, t) &\doteq \{\delta_{II} \times \nu_t, \delta_{II} \times \mu_t\} && t \in [0, 1] \\
 T_{d_t}(II, t) &\doteq \{\delta_{(I,t)}\} && t \in [0, 1] \\
 T_{a_t}(II, t) &\doteq \{\delta_{(III,t)}\} && t \in [0, 1] \\
 T_{s_t}(III, t) &\doteq \{\delta_{IV} \times \nu_t\} && t \in [0, 1] \\
 T_{a_t}(IV, t) &\doteq \{\delta_{(III,t)}\} && t \in [0, 1] \\
 T_{d_t}(IV, t) &\doteq \{\delta_{(I,t)}\} && t \in [0, 1] \\
 T_c(s) &\doteq \emptyset && \text{para todo otro } s \in S, c \in L
 \end{aligned}$$

La complejidad aparente del sistema puede ser intimidante la primera vez que se lo observa, pero es posible comprender su dinámica con relativa facilidad si se lo estudia desde el ángulo de su comportamiento.

Todo comienza en el estado inicial (i). Desde allí se parte con la acción e hacia cualquier punto del primer campo, $I \times [0, 1]$, representado en la Figura 3.1 con la barra graduada vertical de la izquierda. La numeración de los continuos $[0, 1]$ sigue el sentido horario: el superior es $II \times [0, 1]$ (aka: “segundo campo”), el de la derecha es el tercer campo y el inferior el cuarto.

Desde el primer campo el sistema sólo puede avanzar. Esto es: trasladarse al segundo campo. Pero para determinar en qué punto del $[0, 1]$ caerá, primero tiene que realizar una

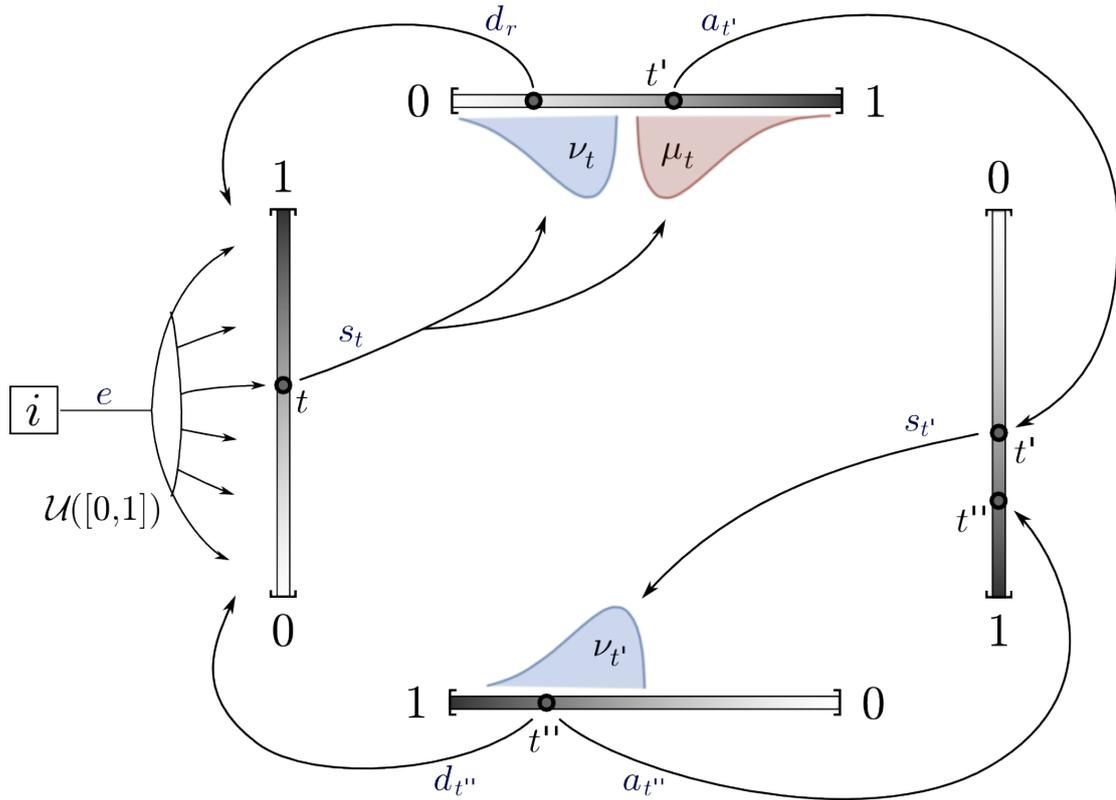


Figura 3.1: Esquema del NLMP del Ejemplo 3.3

elección no determinística (puede salir sorteada ν_t ó μ_t) y luego una estocástica (aplicar la medida escogida). En cuanto a las medidas ν_t y μ_t , se encuentran definidas de la misma forma que se lo hizo en la página 19. La Figura 2.7 ofrece una representación gráfica de las mismas.

Una vez en el segundo campo el sistema puede avanzar (trasladarse al tercer campo), con la etiqueta $a_{t'}$, o retroceder (volver al primer campo), con la etiqueta $d_{t'}$. En ambos casos el salto será determinístico.

En el tercer campo la única opción es avanzar hacia el cuarto, pero para ello es necesario realizar una elección estocástica a través de la medida $\nu_{t'}$. Y en el cuarto campo nuevamente se puede retroceder ó avanzar. Lo primero lo realiza la acción $a_{t''}$, y lo segundo es una transición etiquetada con $d_{t''}$ dirigida hacia el primer campo.

Por más complejo que sean el espacio de estados y las medidas de probabilidad ν y μ , el comportamiento del sistema asemeja al de un ciclo discreto con cuatro estaciones. En dos de ellas se puede avanzar hacia la siguiente estación, o retroceder hacia la estación anterior. Y en las otras dos sólo se puede avanzar. Una pregunta razonable que se le podría hacer a este NLMP es: ¿cuantas acciones en promedio es necesario que realice el entorno para dar una vuelta completa al circuito?

No se llevará más lejos el análisis del Ejemplo 3.3. Es preferible volcar ahora la atención sobre un nuevo caso de estudio, que incidentalmente posee una finalidad doble. Por un lado acerca la teoría “de lápiz y papel” al mundo físico en que vivimos. Pero además ofrece

un provechoso punto de comparación entre las dos teorías, LMP y NLMP. Se trata del viejo y querido aire acondicionado.

Ejemplo 3.4. La estructura básica del sistema se preservará tal cual se la presentó en el Ejemplo 2.21 de la página 18, con el detalle de que esta vez se incluirán casos de no determinismo interno.

Supóngase que nos encontramos en una habitación de hotel, durante una calurosa tarde de verano que vuelve indispensable el uso de nuestro aparato de aire acondicionado. Entonces lo encendemos, y la dinámica ya conocida comienza a funcionar.

Las distribuciones de probabilidad asociadas a cada transición no fueron escogidas al azar. Se supone que si el aparato estuvo con el motor apagado durante un tiempo, la temperatura de la sala comenzará a elevarse. Por ello la transición τ_{sensar_t} que parte de un estado de motor desactivado (i.e. (d, t)) devuelve una distribución con cola a derecha (i.e. μ_t). El aumento de temperatura se simula otorgándole una mayor probabilidad acumulada a las temperaturas por encima de la actual. Lo opuesto ocurre cuando partimos de un estado (a, t) , donde el motor estuvo activado durante un tiempo.

Ahora bien, ese bonito modelado podría funcionar de maravilla en un mundo perfecto, pero es de común saber que nuestro mundo dista un tanto de la perfección. Las variaciones de la temperatura ambiental difícilmente podrán ser modeladas con una única medida de probabilidad, por más compleja que ésta sea.

Para ser bien gráficos supóngase que súbitamente llegan a la ciudad vientos huracanados del sur, trayendo ráfagas de aire de hasta 120 km/h que golpean la pared de nuestra habitación de hotel. Entonces es posible que la temperatura de la sala presente cierta tendencia a disminuir, incluso cuando el motor pase desactivado la mayor parte del tiempo. Eso no está siendo modelado por el LMP.

Tampoco es necesario plantear un panorama tan extremo. La presencia de nubes en el cielo puede modificar la cantidad de radiación solar directa que recibe el exterior de la habitación, y con ello los parámetros ideales de μ_t y ν_t deberían ser retocados para adecuarse a la realidad. Lo peor de todo es que estos cambios son por completo impredecibles, al menos para las posibilidades humanas.

Es justamente en estos casos en los que el no determinismo sale al rescate. Como se comentó, es imposible predecir con exactitud cual será la medida de probabilidad que mejor describa la próxima variación de temperatura, indistintamente del estado actual (motor activado / motor desactivado) ¿Cuál distribución conviene elegir entonces para asociar a la transición τ_{sensar_t} ?

La respuesta del modelo de los NLMP es radical: incluir todas las medidas de probabilidad que se consideren relevantes y razonables. Al fin y al cabo la selección de la mejor opción es de naturaleza no determinista, así que el modelo realmente estará simulando al mundo físico con un alto grado de realismo.

La idea entonces es clara: en lugar de definir a μ_t como la distribución devuelta por $\tau_{sensar_t}(d, t)$, se generaliza el salto de estado con la transición no determinista $T_{sensar_t}(d, t) = \xi \in \Delta(\Sigma)$, donde ξ contiene todas las medidas de probabilidad que se crean convenientes.

Para mantener el diagrama dentro de los límites de la simplicidad se emplearán conjuntos $\xi \in \Delta(\Sigma)$ finitos, y se añadirá no determinismo a un solo tipo de transiciones: las que parten de los estados en los que el motor se encuentra desactivado.

Como ya se mencionó, la mayor parte de las componentes del sistema se mantendrán invariantes respecto del LMP del Ejemplo 2.21. La única modificación la sufren las funciones de transición, como se detalla a continuación:

$$\begin{aligned}
 T_{encender}(\text{ON}) &\doteq \{\mathcal{U}(\{d\} \times T)\} \\
 T_{desactivar_t}((s, t)) &\doteq \{\delta_{(d,t)}\} && \text{si } t < t \\
 T_{activar_{p(t)}}((s, t)) &\doteq \{\delta_{(a,t)}\} && \text{si } t \geq t \\
 T_{sensar_t}((d, t)) &\doteq \{\delta_s \times \mu_t, \delta \times \nu_t\} \\
 T_{sensar_t}((a, t)) &\doteq \{\delta_s \times \nu_t\} \\
 T_b(x) &\doteq \emptyset && \text{para todo otro } x \in S, b \in L
 \end{aligned}$$

El esquema del nuevo sistema puede verse en la Figura 3.2. Nótese la doble flecha que parte del estado (d, t) hacia el continuo $s \times T$ a través de la acción $sensar_t$. Una posibilidad es que μ_t salga sorteada (variación esperable de la temperatura); la otra opción es ν_t (vientos huracanados del sur).

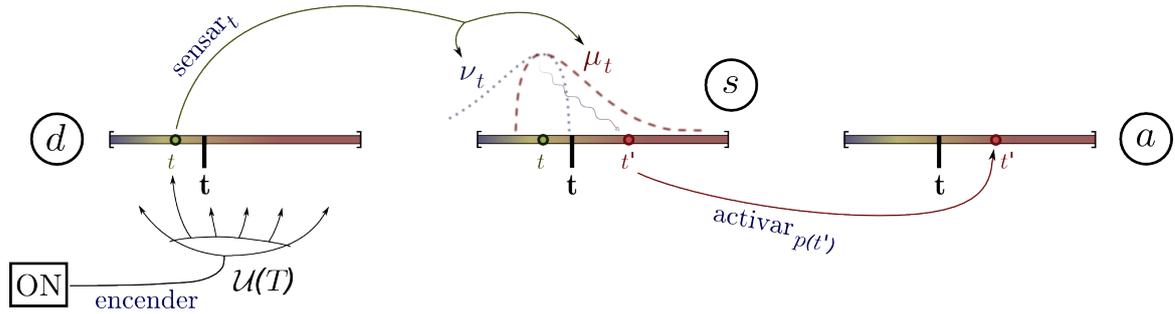


Figura 3.2: NLMP de un aire acondicionado

3.2. Bisimulaciones

Nuevamente se presenta la tarea de extender las nociones actuales de bisimulación para que contemplen al nuevo modelo. Cuando en la teoría de los LMP se enfrentó este desafío, el primer resultado obtenido ligaba estados, transiciones y medidas de probabilidad de una forma que recordaba al esquema 2.1 de la página 7. Concretamente se dijo que dos estados $s, t \in S$ se consideran ligados por una relación de bisimulación (de estado) ' R ' si:

$$\forall Q \in \Sigma(R) . \tau_a(s)(Q) = \tau_a(t)(Q) \tag{3.1}$$

En el caso de los NLMP se cuenta con un conjunto de medidas de probabilidad por cada par (estado, transición). Una forma de extender (3.1) al nuevo modelo es pedir que

por cada medida μ originada en s por la acción a , el estado bisimilar t posea una propia que sea equivalente a μ según R , y viceversa. Algo así como:

$$s R t \implies \begin{cases} \forall \mu \in T_a(s) . \exists \nu \in T_a(t) . \mu R \nu \\ \forall \nu \in T_a(t) . \exists \mu \in T_a(s) . \nu R \mu \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $\mu R \nu$ denota la relación R elevada al espacio $\Delta(S)$.

Para acortar notación se denomina $T_a(s) R T_a(t)$ al consecuente de (3.2). Esta bisimulación ha sido definida y utilizada en trabajos como [Str93], [D'Ar99], [Bra02], y por lo tanto se la llamará *bisimulación tradicional*. Su definición formal se da a continuación.

Definición 3.5. Una relación $R \subseteq S \times S$ es una *bisimulación tradicional* en un NLMP $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ si y sólo si es simétrica, y para cada par de estados $s, t \in S$ y etiqueta $a \in L$ satisface:

$$s R t \implies T_a(s) R T_a(t)$$

Un par de estados $s, t \in S$ se dicen *tradicionalmente bisimilares*, denotado $s \sim_t t$, si existe alguna relación de bisimulación tradicional R tal que $s R t$.

Al igual que ocurría con los LMPs esta definición, ‘natural’ si se quiere, presenta una serie de inconvenientes. Sean $s, t \in S$ dos estados para los que se desea comprobar si $s \sim_t t$. Entonces no solo hay que encontrar un análogo en $T_a(t)$ para cada medida $\mu \in T_a(s)$ (y viceversa), sino que además debe poder manipularse dichas medidas puntuales.

Ahora bien: nada garantiza que la σ -álgebra de Giry de un NLMP (i.e. $\Delta(\Sigma)$) distinga los singuletes $\{\mu\} \in 2^{\Delta(S)}$, que son los que la Definición 3.5 pretende manipular. Esto es un problema que puede abrir paso a ejemplos poco gratos, como se muestra en la Sección 3.5. Por ello es preciso hallar una relación de bisimulación más débil, que no asuma nada sobre la estructura del NLMP.

Hay una serie de aspectos clave que esta definición debe contemplar. El primero es la restricción impuesta por la medibilidad: sólo está permitido cuantificar sobre conjuntos medibles, ya sean de estados o de medidas de probabilidad. Sean ahora $s, t \in S$ dos estados a relacionar, y $\xi, \zeta \in \Delta(\Sigma)$ los conjuntos de medidas asociados a ellos a través de una acción $a \in L$. Como ξ y ζ son los elementos que caracterizan a dichos estados (para la etiqueta a), la decisión de si s está relacionado con t debe involucrar algún tipo de interacción por parte de la relación ‘ R ’ con los conjuntos ξ y ζ .

En la Sección 2.5, página 13, se introdujo una σ -álgebra formada por los conjuntos que presentan medibilidad y clausura respecto de una relación, que son las propiedades aludidas en el párrafo anterior. Ésta es $\Sigma(R)$. Sin embargo aquí se busca manipular conjuntos de medidas de probabilidad, y la σ -álgebra que trata con ellas es $\Delta(\Sigma(R))$.

Este razonamiento parece indicar que lo más natural sería trabajar con elementos de $\Delta(\Sigma(R))$, que son conjuntos medibles y R -cerrados de medidas de probabilidad sobre (S, Σ) . El otro concepto esencial para la bisimulación que se desea definir es el introducido en la Definición 3.2: considerar la superposición o ‘impacto’ de conjuntos de medidas como condición a comprobar. Considerando todo lo expuesto, se introduce formalmente la bisimulación de estado para la teoría de los NLMP semi-estructurados.

Definición 3.6. Una relación $R \subseteq S \times S$ es una *bisimulación de estado* en un NLMP $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ si y sólo si es simétrica, y para cada par de estados $s, t \in S$ y etiqueta $a \in L$ satisface:

$$s R t \implies \forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)). T_a(s) \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow T_a(t) \cap \xi \neq \emptyset$$

Se dice que $s, t \in S$ son *estados bisimilares*, denotado $s \sim_s t$, si existe alguna relación de bisimulación de estado R tal que $s R t$.

Entonces dos estados serán bisimilares si, dada un relación R , y para cada acción del NLMP, sus conjuntos de medidas asociados impactan los mismos conjuntos medibles y R -cerrados de medidas de probabilidad.

Por último y en analogía a los resultados de [Dan06] se presenta una noción de bisimulación aún menos estricta: la *bisimulación de evento*. Al igual que en el trabajo de Danos *et al.* este concepto se centra en la medibilidad inherente a la estructura, en lugar de buscar una relación *a priori* arbitraria entre estados.

Definición 3.7. Una *bisimulación de evento* en un NLMP $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ es una sub- σ -álgebra $\Xi \subseteq \Sigma$ tal que para cada etiqueta $a \in L$, la función de transición no determinista $T_a \in (S, \Xi) \rightarrow (\Delta(\Sigma), H(\Delta(\Xi)))$ es medible.

Notar que la función T_a cuya medibilidad se exige es exactamente la misma transición original $T_a \in (S, \Sigma) \rightarrow (\Delta(\Sigma), H(\Delta(\Sigma)))$ del NLMP. La condición para que Ξ sea una bisimulación de evento es que dicha función sea a su vez medible de Ξ en $H(\Delta(\Xi))$. Aquí la notación $H(\Delta(\Xi))$ hace referencia a la sub- σ -álgebra de $H(\Delta(\Sigma))$ generada por $\{H_\xi \mid \xi \in \Delta(\Xi)\}$.

Análogamente al caso de los LMP, aquí también se extiende la noción formalizada en 3.7 al mundo de las relaciones. Se considera bisimulación de evento a una relación $R \subseteq S \times S$ si existe alguna bisimulación de evento $\Xi \subseteq \Sigma$ tal que $R = \mathcal{R}(\Xi)$. Se dice que dos estados $s, t \in S$ son *bisimilares por eventos*, denotado $s \sim_e t$, si existe alguna bisimulación de evento Ξ tal que $s \mathcal{R}(\Xi) t$.

Las tres definiciones (3.5, 3.6 y 3.7) fueron dadas sobre un único NLMP. Para comprobar la bisimilitud de dos NLMP el método es el mismo que el de la Definición 2.3 (página 7): se trabaja sobre su suma directa y se intenta demostrar que sus estados iniciales son bisimilares.

Con esto concluye el marco teórico referente a las nociones de bisimulación para el modelo de los NLMP semi-estructurados. A continuación se expone un ejemplo concreto, que con un poco de suerte ayudará a poner los pies sobre la tierra.

Ejemplo 3.8. El lector atento habrá notado la similitud entre los dos ejemplos dados en la sección anterior. Ambos tenían un estado inicial desde el cual el sistema se movía hacia un conjunto continuo de estados. Una vez allí las funciones de transición permitían moverse dentro del continuo según tres medidas de probabilidad: una delta de Dirac y dos distribuciones Beta.

Antes de continuar es necesario retocar un poco los sistemas, para poder construir más adelante una relación R que respete todo los aspectos de la Definición 3.6. Por ejemplo, los

alfabetos de ambos sistemas son disjuntos, condición que la mentada definición ni siquiera considera. Esto puede solucionarse fácilmente a través de una redefinición muy natural de las etiquetas del primer ejemplo, la cual se presenta a través del mapeo g :

$$\begin{aligned} g(e) &\doteq \text{encender} \\ g(s_t) &\doteq \text{sensar}_t && \forall t \in [0, 1] \\ g(a_t) &\doteq \text{activar}_{p(t)} && \forall t \in [0, 1] \\ g(d_t) &\doteq \text{desactivar}_t && \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Además se realiza un cambio de escala en el rango de temperaturas $[\min, \max]$ del aire acondicionado, para que coincida con el intervalo unitario. Es decir: $[\min, \max] = [0, 1]$.

De ahora en más nos referiremos con \mathbb{S}_a al primer sistema y con \mathbb{S}_b al NLMP que simula un aire acondicionado. A su vez añadiremos los subíndices ‘ a ’ y ‘ b ’ a sus componentes respectivos para poder diferenciarlos. Así Σ_a hace referencia a los eventos de \mathbb{S}_a , L_a a sus etiquetas retocadas (i.e. $g(L)$), S_b al espacio de estados de \mathbb{S}_b , etc.

Pues bien, es posible construir una relación de bisimulación de estado ‘ R ’ entre \mathbb{S}_a y \mathbb{S}_b . Es decir que $i \sim_s \text{ON}$, donde i y ON son considerados los estados iniciales de los ejemplos 3.3 y 3.4 respectivamente. Recuérdese que dicha relación se construye sobre el NLMP unión, definido como $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$, donde $S \doteq S_a \uplus S_b$, $\Sigma \doteq \Sigma_a \uplus \Sigma_b$, etc.

Por definición el par (i, ON) debe estar presente. Para avanzar en la construcción de la relación se toma un punto cualquiera $t \in [0, 1]$ y se lo moviliza por los cuatro campos de \mathbb{S}_a . Aplicando la Definición 3.6 a cada uno de los estados (j, t) obtenidos y estudiando sus implicaciones en el sistema concreto $\mathbb{S}_a \uplus \mathbb{S}_b$, será posible construir R paso a paso.

Considérese primero el estado (I, t) , al cual podría llegarse desde $i \in S_a$ tras ejecutar ‘*encender*’. Luego de los cambios operados sobre las etiquetas, (I, t) sólo puede realizar la acción $g(s_t) = \text{sensar}_t$, lo cual devuelve el conjunto medible de medidas $\{\nu_t, \mu_t\}$. Hay dos estados en el espacio S_b que pueden realizar la misma transición. Pero sólo uno de ellos, (d, t) , es trivialmente comparable. Más específicamente, como el conjunto de medidas asociado a (d, t) a través de sensar_t es *exactamente el mismo* que en el caso de (I, t) , no cabe duda de que se satisface:

$$\forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . T_{\text{sensar}_t}((I, t)) \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow T_{\text{sensar}_t}((d, t)) \cap \xi \neq \emptyset$$

por lo cual puede incluirse al par $((I, t), (d, t))$ dentro de la relación en construcción. Recuérdese que aquí $\Sigma = \Sigma_a \uplus \Sigma_b$.

Continuemos. En \mathbb{S}_a el estado (I, t) puede trasladarse hacia (II, t') , y análogamente (d, a) puede ir hacia (s, t') . Ambos estados destino tienen habilitadas las acciones $\{\text{desactivar}_t, \text{activar}_{p(t)}\}$. En el primer caso los medibles de medidas que se obtienen son $\{\delta_{(I, t')}\}$ y $\{\delta_{(II, t')}\}$ respectivamente. Y en el segundo caso se obtienen $\{\delta_{(d, t')}\}$ y $\{\delta_{(a, t')}\}$ respectivamente. Esta vez los conjuntos no son idénticos, así que hay que desarrollar un poco más el argumento.

Como ya se dijo que $(I, t) R (d, t)$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces el conjunto $\{\delta_{(I, t)}, \delta_{(d, t)}\}$ es R -cerrado para el lifting de R sobre $\Delta(S)$. Esto se debe a que cualquier subconjunto de S que sea a la vez medible y R -cerrado, incluirá al estado (I, t) si y sólo si incluye también

a (d, t) . Y por ende las medidas $\delta_{(i,t)}$ y $\delta_{(d,t)}$ siempre medirán lo mismo en los conjuntos de esa naturaleza. Es decir:

$$\forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . T_{desactivar_t}((II, t)) \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow T_{desactivar_t}((s, t)) \cap \xi \neq \emptyset$$

Bueno, excelente, pero eso sólo soluciona una parte de la cuestión. También hay que ver que ocurra lo mismo con las medidas $\{\delta_{(III,t)}\}$ y $\{\delta_{(a,t)}\}$ alcanzadas a través de la etiqueta $activar_{p(t)}$. Y para que ese sea el caso es preciso que $((III, t), (a, t)) \in R$ para todo $t \in [0, 1]$. Sólo así nuevamente tendremos la condición:

$$\forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . T_{activar_{p(t)}}((II, t)) \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow T_{activar_{p(t)}}((s, t)) \cap \xi \neq \emptyset$$

Se añaden pues dos nuevas clases de pares a la relación: $((II, t), (s, t))$, y en consecuencia $((III, t), (a, t))$, donde $t \in [0, 1]$. Pero ese segundo par fue añadido por necesidad, aún no se comprobó que $(III, t) \in S_a$ y $(a, t) \in S_b$ sean estados bisimilares. Pues bien, ambos tienen habilitada la única acción $sensar_t$, y en ambos casos el medible asociado es $\{\nu_t\}$. Puede verse entonces que se satisface:

$$\forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . T_{sensar_t}((III, t)) \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow T_{sensar_t}((a, t)) \cap \xi \neq \emptyset$$

por lo que se concluye que $(III, t) R (a, t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Los únicos estados aún sin pareja son los (IV, t) del sistema S_a . Notemos que éstos pueden moverse hacia (III, t) y hacia (I, t) con las acciones $activar_{p(t)}$ y $desactivar_t$ respectivamente. Y lo hacen de forma determinística, pues $(IV, t) \xrightarrow{activar_{p(t)}} \{\delta_{(III,t)}\}$, y $(IV, t) \xrightarrow{desactivar_t} \{\delta_{(I,t)}\}$. Pero entonces este caso es idéntico en todo sentido al de los estados (II, t) , y por consiguiente debe ser que $(IV, t) R (II, t)$, y además $(IV, t) R (s, t)$.

Nótese que ya todos los estados alcanzables en ambos sistemas desde sendos estados iniciales cuentan con algún estado relacionado en el otro sistema. En rigor habría que revisar que todos los pares propuestos para $R \subseteq S \times S$ satisfacen las condiciones de la Definición 3.6. Sin embargo esto extendería demasiado un ejemplo cuyo fin es meramente ilustrativo. Y además las explicaciones dadas a lo largo de la construcción de R son bastante extensas, al menos lo suficiente como para dejar al lector satisfecho de que lo que se construyó es una bisimulación de estado. Concluye pues la demostración de que $S_a \sim_s S_b$. La relación sobre $S_a \times S_b$ que lo verifica es:

$$R = \{(i, ON)\} \uplus \left\{ \begin{array}{l} ((I, t), (d, t)) \\ ((II, t), (s, t)) \\ ((III, t), (a, t)) \\ ((IV, t), (s, t)) \\ ((IV, t), (II, t)) \end{array} \right\} t \in [0, 1]$$

3.3. La lógica \mathcal{L}

En esta sección se presenta una lógica originalmente introducida por D'Argenio *et al.* en [DSW11, sec. 5], cuya semántica la forman los elementos constitutivos de los NLMP. La misma se asemeja a otra lógica desarrollada para el caso discreto en [PaSe07]. La principal diferencia entre ambas es que la primera considera dos tipos de fórmulas: unas que representan conjuntos de medidas (como en el caso de Parma y Segala), y otras que se interpretan como conjuntos de estados.

\mathcal{L} denota las producciones del segundo tipo mencionado, y \mathcal{L}_Δ denota las que hablan sobre medidas de probabilidad. Su sintaxis es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \quad \varphi &\equiv \top \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \langle a \rangle \psi \\ \mathcal{L}_\Delta : \quad \psi &\equiv \bigvee_{i \in I} \psi_i \mid \neg \psi' \mid [\varphi]_{\geq q} \end{aligned}$$

donde a es una etiqueta, I es un conjunto finito o numerable y $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Como se mencionó, la semántica de cada fórmula se interpreta con respecto a un NLMP $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ concreto. Las fórmulas de \mathcal{L} se interpretan como conjuntos de estados, y las de \mathcal{L}_Δ hablan de conjuntos de medidas de probabilidad sobre (S, Σ) . Formalmente la semántica se define como sigue:

$$\begin{aligned} \llbracket \top \rrbracket &\doteq S & \llbracket \bigvee_{i \in I} \psi_i \rrbracket &\doteq \bigcup_{i \in I} \llbracket \psi_i \rrbracket \\ \llbracket \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rrbracket &\doteq \llbracket \varphi_1 \rrbracket \cap \llbracket \varphi_2 \rrbracket & \llbracket \neg \psi' \rrbracket &\doteq \llbracket \psi' \rrbracket^c \\ \llbracket \langle a \rangle \psi \rrbracket &\doteq T_a^{-1}(H_{\llbracket \psi \rrbracket}) & \llbracket [\varphi]_{\geq q} \rrbracket &\doteq \Delta^{\geq q}(\llbracket \varphi \rrbracket) \end{aligned}$$

donde $H_{\llbracket \psi \rrbracket}$ hace referencia a la colección de conjuntos de medidas que impactan contra el conjunto $\llbracket \psi \rrbracket$, es decir: $\{\zeta \in \Delta(S) \mid \zeta \cap \llbracket \psi \rrbracket \neq \emptyset\}$.

Notar que $\langle a \rangle \psi$ es válida en un estado s cuando existe alguna $\mu \in T_a(s)$ tal que $\mu \models \psi$. Por otro lado la fórmula $[\varphi]_{\geq q}$ es válida para una medida μ si $\mu(\llbracket \varphi \rrbracket) \geq q$. Pero para aplicar una medida de probabilidad a un conjunto este último debe ser medible, y en consecuencia se requiere que ambos $\llbracket \varphi \rrbracket$ y $\llbracket \psi \rrbracket$ sean medibles para toda $\varphi \in \mathcal{L}$, $\psi \in \mathcal{L}_\Delta$.

Por fortuna este requisito es satisfecho por la lógica, lo cual puede probarse usando inducción en la estructura de las fórmulas. El argumento inductivo tiene éxito porque:

1. todas las operaciones de conjuntos involucradas (intersección, unión, complemento) preservan la medibilidad,
2. T_a se definió como función medible, así que su imagen inversa también preserva la medibilidad,
3. $\Delta^{\geq q}(B)$ es un generador de $\Delta(\Sigma)$ siempre y cuando B sea medible, y por hipótesis inductiva el conjunto $\llbracket \varphi \rrbracket$ efectivamente lo es.

Se denotan $\llbracket \mathcal{L} \rrbracket \doteq \{\llbracket \varphi \rrbracket \mid \varphi \in \mathcal{L}\}$ y $\llbracket \mathcal{L}_\Delta \rrbracket \doteq \{\llbracket \psi \rrbracket \mid \psi \in \mathcal{L}_\Delta\}$.

El aspecto más interesante de esta lógica es que caracteriza a la bisimulación de evento (Def. 3.7, pág. 30). Es decir: dos estados $s, t \in S$ son bisimilares por eventos (i.e. existe Ξ bisimulación de evento tal que $s \mathcal{R}(\Xi) t$) sii satisfacen las mismas fórmulas de \mathcal{L} .

Los enunciados formales de este y muchos otros resultados de interés para la teoría de los NLMP se agrupan en la Sección 3.4.

3.4. Resultados principales

Aquí se enumeran un conjunto de resultados importantes sobre los NLMP semi-estructurados, que involucran diversos aspectos de la teoría. Las pruebas no serán dadas puesto que todos cuentan con un análogo en el Capítulo 4, y sus demostraciones son muy similares. Cabe mencionar que gran parte de ellos también posee un lema, corolario o teorema semejante en el campo de los LMP.

Comenzamos con una propiedad, también presente en los LMPs, que establece la relación fundamental entre las bisimulaciones de estado y de evento. Aquí y por el resto de la sección se asume la existencia de un NLMP $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$.

Lema 3.9. *Si $R \subseteq S \times S$ es una relación simétrica, entonces R es una bisimulación de estado si y sólo si $\Sigma(R)$ es una bisimulación de evento.*

En las definiciones de la Sección 3.2 se les dio nombre a tres relaciones especiales, cada una de las cuales engloba a todas las de su clase. Se trata de \sim_t , \sim_s y \sim_e . Recuérdese que dados $s, t \in S$ se dice que $s \sim_t t$ sii hay alguna relación de bisimulación tradicional R que contenga el par (s, t) . Esto significa que $\sim_t = \bigcup \{R \mid R \text{ es bisimulación tradicional}\}$. Lo mismo ocurre en los otros dos casos.

Una propiedad por demás elegante que presentan dichas relaciones es que son coherentes con su definición. Más específicamente:

Proposición 3.10.

- a) \sim_t es una bisimulación tradicional
- b) \sim_s es una bisimulación de estado
- c) \sim_e es una bisimulación de evento

Por definición, la Proposición 3.10 ubica a cada una de estas relaciones en la cima de su clase. Es decir: \sim_t es la mayor de las bisimulaciones tradicionales, \sim_s la mayor de las de estado, y \sim_e la mayor de las de evento.

Otro aspecto interesante es la interrelación que existe entre ellas. Recuérdese que cuando se las introdujo se habló de que unas eran “muy fuertes”, mientras que otras presentaban una naturaleza menos restrictiva. A continuación se formalizan dichos comentarios.

Teorema 3.11. *La mayor bisimulación tradicional es a su vez una bisimulación de estado. Es decir: $\sim_t \subseteq \sim_s$*

Teorema 3.12. *La mayor bisimulación de estado es a su vez una bisimulación de evento. Es decir: $\sim_s \subseteq \sim_e$*

Por otra parte en la Sección 3.3 se anticipó que la lógica introducida por D’Argenio *et al.* caracteriza a la más grande de las bisimulaciones. Eso significa que dos estados son bisimilares por eventos si y sólo si satisfacen las mismas fórmulas de la lógica.

Antes de presentar el enunciado correspondiente es conveniente introducir una nueva notación. Recuérdense que $\llbracket \mathcal{L} \rrbracket$ denota la colección de todos los subconjuntos (medibles) de estados generados por alguna fórmula de la lógica \mathcal{L} . Se usará el término $\mathcal{R}(\mathcal{L})$ para denotar la relación inducida por dicha colección, o sea: $\mathcal{R}(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$.

Teorema 3.13. *La lógica \mathcal{L} caracteriza a la bisimulación de evento. Es decir: $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \sim_e$*

Entonces resumiendo el contenido de los teoremas 3.11, 3.12 y 3.13 es posible armar la siguiente cadena de inclusiones:

$$\sim_t \subseteq \sim_s \subseteq \sim_e = \mathcal{R}(\mathcal{L}) \quad (3.3)$$

Por último se presenta un resultado menos general pero no por ello menos interesante. Todos los enunciados hasta ahora presentados hacen uso de una estructura completamente genérica, y por ende pueden aplicarse a cualquier NLMP. Sin embargo, bajo ciertas restricciones de dominio se obtiene que todas las relaciones de la cadena (3.3) coinciden.

Más específicamente se requiere que (S, Σ) sea un *espacio analítico Borel estándar*, lo que significa que debe ser isomorfo al espacio $(S, \sigma(\mathcal{T}))$, donde \mathcal{T} es un tipo especial de topología denominada *polaca*. Y además es necesario que la ‘cantidad de no determinismo’ sea finita. Es decir: que $T_a(s)$ sea un conjunto finito para todo estado s y etiqueta a del sistema, condición que se denomina *de imagen finita*.

Si se cumplen las dos condiciones arriba descriptas es posible demostrar que todas las bisimulaciones presentes en (3.3) coinciden.

Teorema 3.14 ([DSW11, Teo. 5.10]). *Sean (S, Σ) un espacio analítico y $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ un NLMP de imagen finita. Entonces:*

$$\sim_t = \sim_s = \sim_e = \mathcal{R}(\mathcal{L}) \quad (3.4)$$

Con esa joyita teórica concluye la sección de resultados.

3.5. Distinción de las bisimulaciones

El Teorema 3.14 presenta una situación ideal, a costa de una serie de restricciones en la expresividad del modelo. Por desgracia en el caso general las tres nociones de bisimulación difieren.

Sin embargo, como la cadena de inclusiones de la ecuación (3.3) fue construida sin suposiciones sobre el NLMP base, lo que debe ocurrir (en el caso general) es que:

$$\sim_t \subsetneq \sim_s \subsetneq \sim_e \quad (3.5)$$

En esta sección se presentan dos procesos markovianos etiquetados no deterministas (del modelo semi-estructurado, es decir la Definición 3.1) que atestiguan (3.5).

Lo que sorprende de este resultado es que los sistemas que lo verifican no solo poseen espacios medibles Borel estándar, sino que además operan con medidas de probabilidad determinísticas. Es decir que en lugar de tener un comportamiento estocástico, todas sus transiciones están asociadas a probabilidades de Dirac. Estas estructuras se parecen mucho a los LTS, con la salvedad de que aquí el espacio de estados puede ser continuo, y viene acompañado de una σ -álgebra.

3.5.1. NLMPs no-probabilísticos

Dada la naturaleza de los contraejemplos que se introducen en las Sub-secciones 3.5.2 y 3.5.3, es conveniente estudiar algunas de las propiedades de las medidas de probabilidad de Dirac que operan sobre espacios Borel estándar. Esto permitirá luego reescribir las tres relaciones de bisimulación en términos ‘más amigables’.

Si (S, Σ) es un espacio medible, para cada $P \subseteq S$ (*no necesariamente medible*) se define el conjunto de medidas $\delta(P) \doteq \{\delta_s \mid s \in P\}$. La σ -álgebra asociada a $\Delta(S)$ se extiende por restricción¹ al grupo de las medidas de Dirac $\delta(S)$. Su σ -álgebra es por ende:

$$\Delta(\Sigma)|\delta(S) \doteq \{\xi \cap \delta(S) \mid \xi \in \Delta(\Sigma)\}$$

A priori no puede afirmarse que los elementos de $\Delta(\Sigma)|\delta(S)$ sean medibles del espacio $(\Delta(S), \Delta(\Sigma))$, pues bien podría ocurrir que $\delta(S) \notin \Delta(\Sigma)$ y que la intersección $\xi \cap \delta(S)$ produzca un conjunto no medible en $\Delta(\Sigma)$. Por fortuna ese problema no se presenta cuando Σ es una σ -álgebra Borel estándar. La prueba de este resultado, que se enuncia a continuación, puede hallarse en [DSW11, sec. 6.1].

Propiedad 3.15.

- a) La función $\delta_{(\cdot)} \in S \rightarrow \delta(S)$ es una biyección tal que $\delta_{(\cdot)}$ y su inversa $\delta_{(\cdot)}^{-1}$ son ambas medibles.
- b) Si (S, Σ) es Borel estándar, entonces $\delta(S) \in \Delta(\Sigma)$, y por consiguiente $\Delta(\Sigma)|\delta(S) \subseteq \Delta(\Sigma)$.
- c) Si (S, Σ) es Borel estándar y $X \subseteq S$, entonces $\delta(X)$ es medible si y sólo si X es medible.

A continuación se describen los sistemas con los que se trabaja en esta sección. Luego se presenta una caracterización alternativa de cada una de las bisimulaciones definidas sobre los NLMP, amoldándolas a este entorno específico.

Definición 3.16. La estructura $\mathbb{S} = (S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ se denomina *NLMP no-probabilístico* si y sólo si para todo estado $s \in S$ y etiqueta $a \in L$ se tiene que $T_a(s) \subseteq \delta(S)$.

¹ver Apéndice A, Lema A.3.

Notar que un NLMP no-probabilístico es esencialmente un LTS sobre un espacio medible. Sin embargo las nociones de bisimulación difieren de la bisimulación clásica definida en la Sección 2.2 para los LTS.

Se denota con $\langle a \rangle Q$ para $Q \in \Sigma$ al subconjunto de S que puede alcanzar algún estado de Q luego de realizar una acción a . Es decir:

$$\langle a \rangle Q \doteq \{s \in S \mid T_a(s) \cap \delta(Q) \neq \emptyset\} \quad (3.6)$$

Gracias a la Propiedad 3.15 (c) puede trabajarse con $\delta(Q)$ sin problemas, siempre que Q sea medible en Σ .

Definición 3.17. Sean Ω un conjunto arbitrario, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \subseteq 2^\Omega$, $f \in \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. Se dice que la colección \mathcal{C} es estable respecto del mapeo f si para todo conjunto $A \in \mathcal{C}$ satisface: $f(A) \in \mathcal{C}$.

Lema 3.18. Sea (S, Σ) un espacio Borel estándar y $\Xi \subseteq \Sigma$ una sub- σ -álgebra. Supóngase que $T_a \in S \rightarrow \Delta(\Sigma)$ es no-probabilística, es decir que satisface $T_a(s) \subseteq \delta(S)$ para todo $s \in S$. Entonces T_a es una función medible de $(S, \Xi) \rightarrow (\Delta(\Sigma), H(\Delta(\Xi)))$ si y sólo si Ξ es estable respecto de $\langle a \rangle(\cdot)$. Es decir sii $\forall Q \in \Xi . \langle a \rangle Q \in \Xi$.

La prueba del Lema 3.18 puede hallarse en el Apéndice B (página 82). De ahora en adelante se asume que $\mathbb{S} = (S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ es un NLMP no-probabilístico, y que (S, Σ) es un espacio Borel estándar.

Recuérdese que una bisimulación de evento sobre \mathbb{S} es cualquier sub- σ -álgebra $\Xi \subseteq \Sigma$ para la cual las transiciones T_a mantienen la medibilidad. Entonces el siguiente resultado es un corolario directo del Lema 3.18.

Corolario 3.19. Una σ -álgebra $\Xi \subseteq \Sigma$ es una bisimulación de evento sobre \mathbb{S} si y sólo si es estable bajo el mapeo $\langle a \rangle(\cdot)$.

Lema 3.20. Una relación simétrica $R \subseteq S \times S$ es una bisimulación de estado sobre \mathbb{S} si y sólo si para todo par de estados $s, t \in S$ que satisfagan $s R t$ se cumple que: $\forall Q \in \Sigma(R) . s \in \langle a \rangle Q \Leftrightarrow t \in \langle a \rangle Q$.

Antes de pasar a la prueba es interesante observar que esta noción de bisimulación de estado es en realidad más débil que la original. Para verlo nótese que las definiciones de $\langle a \rangle Q$ y de ‘conjunto de impacto’ indican que:

$$s \in \langle a \rangle Q \iff T_a(s) \in H_{\delta(Q)}$$

O sea que según el Lema 3.20, si R es una bisimulación de estado entonces la consecuencia de $s R t$ es la doble implicación:

$$\forall Q \in \Sigma(R) . (T_a(s) \in H_{\delta(Q)}) \Leftrightarrow (T_a(t) \in H_{\delta(Q)}) \quad (3.7)$$

Por otro lado la definición original (Def. 3.6, pág. 30) establece que la consecuencia de $s R t$ para toda bisimulación de estado R es:

$$\forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . (T_a(s) \in H_\xi) \Leftrightarrow (T_a(t) \in H_\xi) \quad (3.8)$$

Como (S, Σ) es Borel estándar y $\Sigma(R)$ es una sub- σ -álgebra de Σ , por la Propiedad 3.15 c) se tiene que todos los $\delta(Q)$ del predicado (3.7) son medibles de $\Delta(\Sigma(R))$. Sin embargo es claro que los ξ del predicado (3.8) en general abarcarán muchas más medidas de probabilidad que las delta de Dirac. Se sigue que (3.8) implica a (3.7).

Ahora sí, veamos la prueba del lema.

Demostración. (Lema 3.20)

\Rightarrow) Sean $s R t$ y $Q \in \Sigma(R)$. Notar antes que nada que: (i) $\Delta^{\geq 1}(Q) \in \Delta(\Sigma(R))$; y también que (ii) $\Delta^{\geq 1}(Q) \cap \delta(S) = \delta(Q)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 s \in \langle a \rangle Q &\Leftrightarrow T_a(s) \cap \delta(Q) \neq \emptyset \\
 &\Leftrightarrow T_a(s) \cap \Delta^{\geq 1}(Q) \cap \delta(S) \neq \emptyset && \text{(por (ii))} \\
 &\Leftrightarrow T_a(s) \cap \Delta^{\geq 1}(Q) \neq \emptyset && (T_a(s) \subseteq \delta(S)) \\
 &\Leftrightarrow T_a(t) \cap \Delta^{\geq 1}(Q) \neq \emptyset && \text{(por (i) e hipótesis)} \\
 &\Leftrightarrow t \in \langle a \rangle Q
 \end{aligned}$$

\Leftarrow) Sean $s, t \in S$ tales que $s R t$, y $\xi \in \Delta(\Sigma(R))$. Buscamos probar la equivalencia: $T_a(s) \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow T_a(t) \cap \xi \neq \emptyset$ Para ello sea $Q \subseteq S$ el conjunto tal que $\delta(Q) = \delta(S) \cap \xi$, entonces $T_a(s) \cap \xi = T_a(s) \cap \delta(Q)$. Notemos que $s \in \langle a \rangle Q$ sii $\exists \mu \in T_a(s) \cap \delta(Q)$. Luego por la observación anterior se tiene que:

$$T_a(s) \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow s \in \langle a \rangle Q \tag{3.9}$$

Análogamente:

$$T_a(t) \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow t \in \langle a \rangle Q \tag{3.10}$$

Si $Q \in \Sigma(R)$ entonces por hipótesis debe ocurrir que $s \in \langle a \rangle Q \Leftrightarrow t \in \langle a \rangle Q$. Eso y los predicados (3.9) y (3.10) bastan para probar esta parte de la demostración. Es necesario entonces ver que efectivamente $Q \in \Sigma(R)$. Como $\xi \in \Delta(\Sigma(R))$, por la Propiedad 3.15 b) se tiene que $\xi \cap \delta(S) \in \Delta(\Sigma(R))$, lo cual implica que $\delta(Q) \in \Delta(\Sigma(R))$, lo que a su vez por la Propiedad 3.15 c) implica que $Q \in \Sigma$. Solo resta probar que Q es R -cerrado: sean $x R y$ y supongamos $x \in Q$. Entonces $\delta_x \in \xi$, y además para todo $X \in \Sigma(R)$ y $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \delta_x \in \Delta^{\geq q}(X) &\Leftrightarrow x \in X \\
 &\Leftrightarrow y \in X \\
 &\Leftrightarrow \delta_y \in \Delta^{\geq q}(X)
 \end{aligned}$$

Como δ_x y δ_y no pueden ser separadas por ningún generador de $\Delta(\Sigma(R))$, se sigue que no pueden ser separadas por ningún elemento de dicha σ -álgebra. Luego $\delta_y \in \xi$, lo cual implica que $y \in Q$, lo que a su vez prueba que Q es R -cerrado. ■

Lema 3.21. *Una relación simétrica $R \subseteq S \times S$ es una bisimulación tradicional sobre \mathbb{S} si y sólo si para todo par de estados $s, t \in S$ y medida $\delta_u \in T_a(s)$ se cumple que: $s R t \implies \exists \delta_v \in T_a(t) \cdot u \mathcal{R}(\Sigma(R)) v$.*

De forma semejante a lo que ocurrió con la bisimulación de estado, el caso no probabilístico del Lema 3.21 es más débil que el resultado estándar para LTS de [Mil89]. Esto se debe a que la Propiedad 2.17 II) afirma que en general $R \subseteq \mathcal{R}(\Sigma(R))$, mientras que la inclusión inversa no siempre se cumple. Veamos ahora la prueba formal.

Demostración. (Lema 3.21) Supongamos que $s R t$ para alguna bisimulación tradicional R . Entonces $T_a(s) R T_a(t)$ si y sólo si para cada $\mu \in T_a(s)$ existe alguna $\mu' \in T_a(t)$ tal que $\mu R \mu'$. Pero como \mathbb{S} es no-probabilístico debe ser que $\mu = \delta_u$ y $\mu' = \delta_v$ para algunos $u, v \in S$. Ahora bien, $\delta_u R \delta_v$ equivale a decir que:

$$\forall Q \in \Sigma(R) . \delta_u(Q) = \delta_v(Q)$$

lo cual es a su vez equivalente a:

$$\forall Q \in \Sigma(R) . u \in Q \Leftrightarrow v \in Q$$

La última cuantificación es precisamente el predicado $u \mathcal{R}(\Sigma(R)) v$. ■

Los conceptos y resultados hasta aquí expuestos sobre los NLMPs no-probabilísticos son suficientes para nuestros propósitos. Ya es hora de introducir los ejemplos anunciados.

3.5.2. Desigualdad $\sim_t \neq \sim_s$

En esta sección se da un contraejemplo que muestra que la bisimulación tradicional, en general, se encuentra incluida de forma estricta en las otras dos bisimulaciones.

Sean:

$$\begin{aligned} S_1 &\doteq [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{s, t, x\} \\ \Sigma_1 &\doteq \mathcal{B}(S_1) \end{aligned}$$

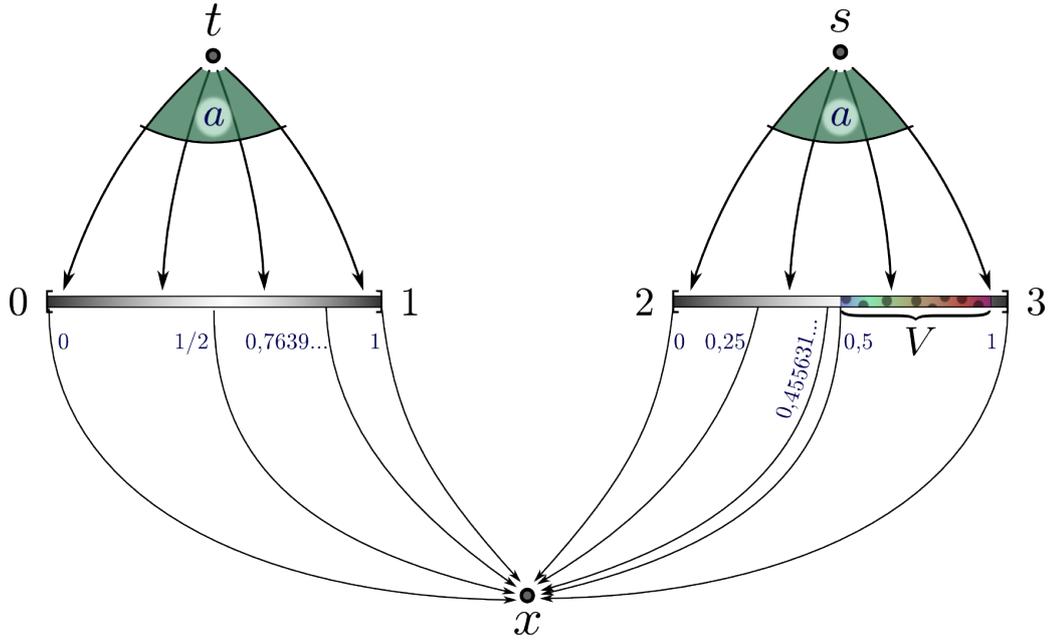
donde $\{s, t, x\} \subseteq \mathbb{R} \setminus [0, 3]$. Nótese que el espacio de estados en su totalidad es un subconjunto de la recta, y que la σ -álgebra es Borel estándar.

Sea V un subconjunto no Borel de $[2.5, 3]$, esto es: $V \notin \mathcal{B}(S_1) = \Sigma_1$. Los conjuntos $[0, 1]$ y $[2, 3] \setminus V$ tienen la misma cardinalidad, lo que permite armar una función biyectiva $f \in [0, 1] \rightarrow [2, 3] \setminus V$.

El conjunto de etiquetas es $L_1 = \{a\} \cup [0, 1]$, y las transiciones:

$$\begin{aligned} T_a(s) &\doteq \delta([2, 3]) \\ T_a(t) &\doteq \delta([0, 1]) \\ T_r(r) = T_r(f(r)) &\doteq \{\delta_x\} && \text{para los } r \in [0, 1] \\ T_c(y) &\doteq \emptyset && \text{para todo otro } c \in L_1, y \in S_1 \end{aligned}$$

El NLMP $\mathbb{S}_1 \doteq (S_1, \Sigma_1, L_1, \{T_c \mid c \in L_1\})$ hará las veces de contraejemplo. En la Figura 3.3 puede apreciarse una esquematización simplificada del mismo. El conjunto no Borel $V \subsetneq [2.5, 3]$ fue representado con un rectángulo moteado superpuesto a la barra graduada de la derecha. Nótese que desde él no hay flechas salientes. Sin embargo como


 Figura 3.3: Esquema del NLMP \mathbb{S}_1

$[2.5, 3] \setminus V \neq \emptyset$, existen estados $y \in [2.5, 3]$ que pueden realizar la transición hacia el estado x . Por ejemplo en el diagrama se supuso que $3 \notin V$, y por ende existe la transición $3 \xrightarrow{f(3)} x$.

Sean $\mathcal{F} \doteq \{\{s, t\}, \{x\}, \{r, f(r)\}_{r \in [0,1]}\} \subseteq 2^{S_1}$ y $R \doteq \mathcal{R}(\sigma(\mathcal{F}))$. El siguiente lema es el paso previo al resultado buscado.

Lema 3.22. \mathbb{S}_1 es un NLMP no-probabilístico, $\sigma(\mathcal{F})$ es una bisimulación de evento, y R es una bisimulación de estado.

Demostración. De la definición de las funciones de transición es claro que $T_c(y) \subseteq \delta(S_1)$ para todo $y \in S_1$ y $c \in L_1$. Lo que no es tan inmediato es que \mathbb{S}_1 satisfaga la definición de NLMP. Para ello hay que comprobar que todas las transiciones mapean en medibles, y que son a su vez funciones medibles. Pues bien, comprobémoslo.

Por la Propiedad 3.15 c) sabemos que para todo estado ‘ y ’ y etiqueta ‘ c ’ se cumple que $T_c(y) \in \Delta(\Sigma_1)$, lo que nos da el primer requisito. Para el segundo recordemos que el Lema 3.18 presenta una forma alternativa de chequear medibilidad: T_c será $H(\Delta(\Sigma_1))$ -medible sii $\forall Q \in \Sigma_1 \cdot \langle c \rangle Q \in \Sigma_1$.

En el caso de la etiqueta a , estudiando las funciones de transición puede verse que $\langle a \rangle Q \in \{\emptyset, \{s\}, \{t\}, \{s, t\}\} \subseteq \Sigma_1$. Por otro lado, los estados habilitados para realizar una acción $r \in [0, 1]$ y caer en Q son: (i) \emptyset , si $x \notin Q$; (ii) $\{r, f(r)\}$, si $x \in Q$. Entonces $\langle r \rangle Q \in \Sigma_1$. Se sigue que \mathbb{S}_1 efectivamente es un NLMP no probabilístico.

Ahora demostremos que $\sigma(\mathcal{F})$ es una bisimulación de evento. Nótese que, como los generadores en \mathcal{F} contienen a $f(r) \in [2, 3]$ cada vez que contienen a $r \in [0, 1]$, entonces para todo $Q \in \sigma(\mathcal{F})$ o bien $\langle a \rangle Q = \emptyset$ o sino $\langle a \rangle Q = \{s, t\}$, según $Q \cap [0, 1] = \emptyset$ o no respectivamente. Y como ambos \emptyset y $\{s, t\}$ son medibles según $\sigma(\mathcal{F})$ entonces dicha

σ -álgebra es estable bajo el mapeo T_a , nuevamente por el Lema 3.18. Para los $r \in [0, 1]$ se tiene que $\langle r \rangle Q \neq \emptyset$ sii $x \in Q$, y en ese caso como ya se dijo:

$$\langle r \rangle Q = \{r, f(r)\} \in \sigma(\mathcal{F}) \quad (3.11)$$

Se sigue que $\sigma(\mathcal{F})$ es estable bajo el mapeo $\langle c \rangle(\cdot)$ para toda acción $c \in L_1$, lo cual, por el Corolario 3.19, equivale a decir que es una bisimulación de evento sobre \mathbb{S}_1 .

Sólo queda por demostrar que R es una bisimulación de estado. Para ello se usa el absurdo sobre el Lema 3.20, lo cual requiere suponer que existen $Q \in \Sigma_1(R)$, $c \in L_1$ y estados $z, y \in S_1$ tales que $z R y$ y $z \in \langle c \rangle Q$, pero que $y \notin \langle c \rangle Q$. Es decir que el hecho de que $\langle c \rangle Q$ no sea R -cerrado debería llevarnos a una contradicción.

Por la ecuación (3.11) si $r \in [0, 1]$ entonces *cualquiera sea* el $Q \in \Sigma_1$ siempre tendremos que $\langle r \rangle Q$ es R -cerrado. Esto indica que la etiqueta problemática que andamos buscando debe ser necesariamente a .

Obsérvese que para satisfacer $\neg R$ -cerrado($\langle a \rangle Q$) debe ocurrir $s \in \langle a \rangle Q \not\equiv t$ o viceversa. Sin embargo el caso inverso requiere que $\exists r \in [0, 1] . r \in Q$, y para que $Q \in \Sigma_1$ sea R -cerrado los siguientes conjuntos deben estar incluidos en él, o ser disjuntos con Q :

$$\{s, t\} \quad \{x\} \quad \{r, f(r)\}_{r \in [0,1]} \quad V$$

Como $r \in Q$ y $r \in [0, 1]$ implican que $f(r) \in Q$, y como $f(r) \in [2, 3]$, entonces no puede ser que $s \notin \langle a \rangle Q \ni t$. El único caso que puede darse es por consiguiente $s \in \langle a \rangle Q \not\equiv t$, lo cual requiere que para todo $r \in [0, 1]$ se cumpla que $\{r, f(r)\} \cap Q = \emptyset$ y que $V \subseteq Q$. Esto nos deja con un Q de la forma $A \cup V$, donde $A \in \{\emptyset, \{x\}, \{s, t\}, \{x, s, t\}\}$. Obsérvese ahora que tal Q necesariamente no es medible en Σ_1 , puesto que V es un conjunto no-Borel por definición. Pero la hipótesis sostenía que $Q \in \Sigma_1(R)$, lo cual nos lleva al absurdo buscado. ■

En la Sección 2.5 se dijo que las clases de equivalencia de la relación inducida por una σ -álgebra se componen de elementos que no pueden ser separados por los medibles. En el caso de una σ -álgebra generada, los generadores que sean disjuntos de a pares caen dentro de esa categoría. Esto significa que las clases de equivalencia de R son: $\{s, t\}$, $\{x\}$, y todos los conjuntos $\{r, f(r)\}$ tales que $r \in [0, 1]$. Y también V , puesto que ningún generador lo toca, y por ende se forma como el complemento de la unión de todos ellos.

Con esto en mente pasemos al resultado que demuestra las desigualdades $\sim_s \neq \sim_t$ y $\sim_e \neq \sim_t$.

Teorema 3.23. *La bisimulación de estado (respectivamente de evento) difiere de la bisimulación tradicional en \mathbb{S}_1 .*

Demostración. El Lema 3.22 prueba que $s \sim_s t$ y que $s \sim_e t$. Por ende bastará con demostrar que $s \not\sim_t t$, i.e. que no existe bisimulación tradicional que contenga al par (s, t) .

El Lema 3.21 ofrece una caracterización alternativa de la bisimulación tradicional para el caso de los NLMP no probabilísticos. En ella se prueba que dos estados serán tradicionalmente bisimilares si y sólo si todos los estados alcanzables desde ellos están relacionados. Más precisamente: si dos estados son tradicionalmente bisimilares, y $w \in S$

es alcanzable desde uno de ellos, debe haber algún $z \in S$ alcanzable desde el otro estado tal que $w \mathcal{R}(\Sigma(R)) z$ para alguna bisimulación tradicional R .

Nótese aparte que si $0 \leq r \leq 1$ pero $y \notin \{r, f(r)\}$, entonces $T_r(y) = \emptyset$, mientras que $T_r(r) = T_r(f(r)) = \{\delta_x\}$. Esto indica que el consecuente de la implicación del Lema 3.21 será falso para el par de estados (r, y) , cualquiera sea la bisimulación tradicional R que se utilice. Por lo tanto $r \not\sim_t y$. A su vez como $T_r(r) = T_r(f(r))$, el consecuente de dicha implicación siempre será verdadero para el par de estados $(r, f(r))$, cualquiera sea $r \in [0, 1]$. Esas dos observaciones demuestran que $\{r, f(r)\}$, con $0 \leq r \leq 1$, es un conjunto \sim_t -cerrado de \mathbb{S}_1 . Se sigue que $\{r, f(r)\} \in \Sigma_1(\sim_t) \subseteq \Sigma_1(R)$, para toda bisimulación tradicional R .

Procedamos ahora por el absurdo: supóngase que se da $s \sim_t t$ y sea $y \in V \not\subseteq [2.5, 3]$. Como y es alcanzable desde s , por la observación inicial debería existir algún $r \in [0, 1]$ alcanzable desde t tal que $y \mathcal{R}(\Sigma_1(R)) r$ para alguna bisimulación tradicional R . Pero $y > 1$ y $y \notin \mathcal{I}m(f)$, por lo cual el generador $\{r, f(r)\} \in \Sigma_1(R)$ separa los estados $\{y, r\}$, y eso se contradice con el hecho $y \mathcal{R}(\Sigma_1(R)) r$. ■

3.5.3. Desigualdad $\sim_s \neq \sim_e$

Aquí se demuestra la segunda contención estricta de la ecuación (3.5), es decir: $\sim_s \subsetneq \sim_e$. El NLMP usado es muy similar a \mathbb{S}_1 : el espacio de estados es el mismo, se añade una (única) etiqueta, y las transiciones son mínimamente modificadas mediante unos retoques al conjunto V y la biyección f . Cabe mencionar que este ejemplo mejora la prueba dada con el mismo fin en [DSW11], la cual está incompleta.

Concretamente: $(S_2, \Sigma_2) = (S_1, \Sigma_1)$, $L_2 = L_1 \uplus \{b\}$, y V será el intervalo completo $(2.5, 3]$. En cuanto a la biyección, ahora se tiene que $f \in [0, 1] \rightarrow [2, 2.5]$. La definición de las transiciones es casi idéntica a la de \mathbb{S}_1 . Las diferencias son que aquí se emplea la nueva función f , y se añade el ciclo $x \xrightarrow{b} x$, o sea: $T_b(x) \doteq \{\delta_x\}$.

Se denomina $\mathbb{S}_2 \doteq (S_2, \Sigma_2, L_2, \{T_c \mid c \in L_2\})$. La Figura 3.4 ofrece una representación gráfica de \mathbb{S}_2 . La colección \mathcal{F} también se define como antes pero para la nueva biyección. Es decir: $\mathcal{F} \doteq \{\{s, t\}, \{x\}, \{r, f(r)\}_{r \in [0, 1]}\}$, y nuevamente $R \doteq \mathcal{R}(\sigma(\mathcal{F}))$.

Lema 3.24. \mathbb{S}_2 es un NLMP no probabilístico, y $\sigma(\mathcal{F})$ es una bisimulación de evento sobre él.

Demostración. Nótese que en el Lema 3.22, las pruebas de que \mathbb{S}_1 es un NLMP no probabilístico y que $\sigma(\mathcal{F})$ es una bisimulación de evento: (I) no usan ninguna propiedad de V ; (II) de la biyección sólo usan el hecho de que $\mathcal{I}m(f) \subset [2, 3]$, lo que se mantiene para \mathbb{S}_2 . Por ello lo único que hay que demostrar aquí es que la transición etiquetada con b presenta las mismas propiedades que las demás.

Primero notemos que $T_b(y) \in \{\emptyset, \{\delta_x\}\}$ para todo $y \in S_2$, así que $T_b(\cdot)$ mapea estados en medibles de $\Delta(\Sigma_2)$. En cuanto a la medibilidad de T_b , por el Lema 3.18 alcanza con probar que $\langle b \rangle Q \in \Sigma_2$ para todo medible $Q \in \Sigma_2$. Luego como

$$\langle b \rangle Q = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin Q \\ \{x\} & \text{si } x \in Q \end{cases}$$

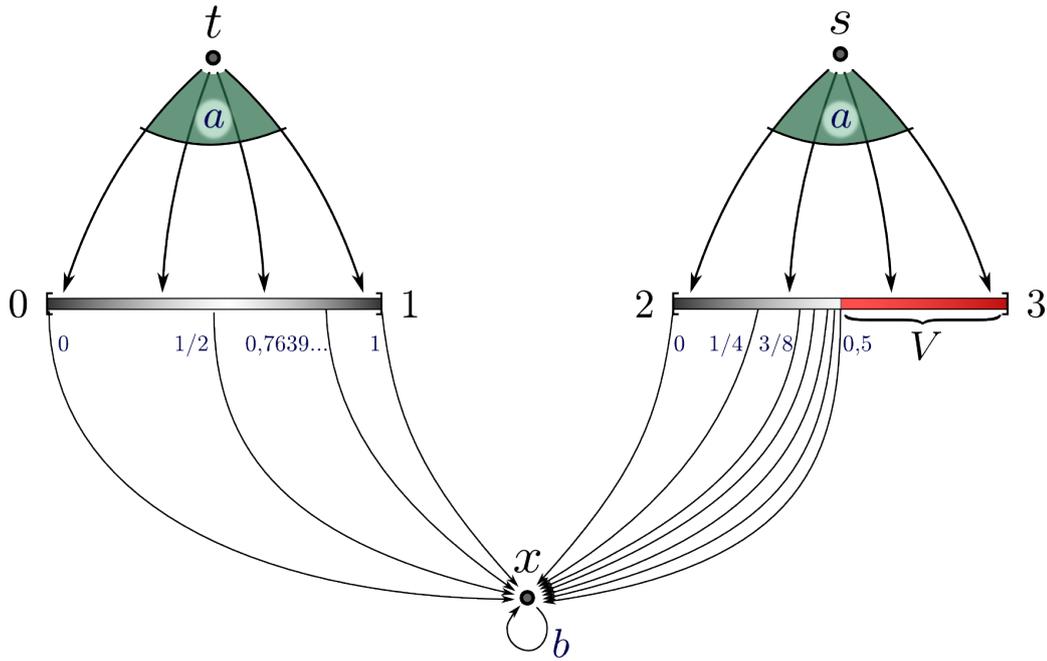


Figura 3.4: Esquema del NLMP \mathbb{S}_2

se sigue que T_b es medible, y en consiguiente \mathbb{S}_2 es un NLMP no probabilístico. Por otro lado, ese mismo argumento sirve para demostrar que $\sigma(\mathcal{F})$ es estable bajo el mapeo $\langle b \rangle \cdot$, puesto que ambos $\emptyset, \{x\} \in \mathcal{F}$. Por el Corolario 3.19 eso equivale a decir que dicha sub- σ -álgebra de Σ_2 es una bisimulación de evento, que es a lo que se quería llegar. ■

Se procede ahora a demostrar que $R = \sim_e$. Para ello debe probarse que es la menor de las bisimulaciones de evento vistas como σ -álgebra. Eso dice que para toda otra bisimulación de evento $\Xi \subseteq \Sigma_2$, se tiene que $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \Xi$, y por lo tanto $R = \mathcal{R}(\sigma(\mathcal{F})) \supseteq \mathcal{R}(\Xi)$. Luego como \sim_e es una bisimulación de evento, debería ser que $R \supseteq \sim_e$. Pero como a su vez es la mayor de ellas, entonces necesariamente $R \subseteq \sim_e$, lo que resulta en la igualdad deseada.

Lema 3.25. *La relación inducida por $\sigma(\mathcal{F})$ es la mayor bisimulación de evento en \mathbb{S}_2 .*

Demostración. Como ya se dijo, la estrategia consiste en probar que $\sigma(\mathcal{F})$ es la menor bisimulación de evento vista como σ -álgebra. Para verlo recordemos que el Corolario 3.19 afirma que todas las sub- σ -álgebra de Σ que son bisimulaciones de evento, deben ser estables bajo el mapeo $\langle c \rangle(\cdot)$ para toda acción $c \in L_2$. En \mathbb{S}_2 existen tres tipos de etiquetas: a, b , y las $r \in [0, 1]$. Nótese entonces que cualquier sub- σ -álgebra $\Xi \subseteq \Sigma_2$ contiene al conjunto S_2 , y por lo tanto para ser estable bajo $\langle c \rangle \cdot$ debe satisfacer:

$$\begin{aligned} \langle a \rangle S_2 = \{s, t\} & \in \Xi \\ \langle b \rangle S_2 = \{x\} & \in \Xi \\ \langle r \rangle S_2 = \{r, f(r)\} & \in \Xi \quad \forall r \in [0, 1] \end{aligned}$$

Observar que esas son las condiciones mínimas que se le deben pedir a cualquier sub- σ -álgebra de Σ_2 para que sea estable bajo el mapeo $\langle c \rangle \cdot$. Por ello toda σ -álgebra estable

por $\langle c \rangle \cdot$ debe incluir a todos los conjuntos de:

$$\sigma(\{\{s, t\}, \{x\}, \{r, f(r)\}_{r \in [0,1]}\}) = \sigma(\mathcal{F})$$

Como el Lema 3.24 prueba que incidentalmente $\sigma(\mathcal{F})$ es ella misma una bisimulación de evento, se sigue que es la menor de ellas en \mathbb{S}_2 . ■

El Lema 3.25 demuestra que $R = \sim_e$. Por lo tanto para ver que $\sim_s \neq \sim_e$ es necesario probar que $R \neq \sim_s$, para lo cual bastaría con ver que, a diferencia de lo que ocurre con \mathbb{S}_1 , en \mathbb{S}_2 la relación $R = \mathcal{R}(\sigma(\mathcal{F}))$ no es una bisimulación de estado. Dicho resultado es una consecuencia del siguiente lema, y del Lema 3.20.

Lema 3.26. $V \notin \sigma(\mathcal{F})$

Demostración. Dada la naturaleza de sus generadores, todo miembro de $\sigma(\mathcal{F})$ es numerable, o sino tiene un complemento con una cantidad numerable de elementos. Por ejemplo $S_2 \setminus \{x\} \in \sigma(\mathcal{F})$ tiene un complemento numerable: $\{x\}$. Por su parte V no es numerable, y su complemento en S_2 tampoco lo es. ■

Corolario 3.27. *Las bisimulaciones de evento y de estado difieren en \mathbb{S}_2*

Demostración. Como ya se dijo, basta con ver que R no es una bisimulación de estado. Claramente V es un conjunto Borel, y como el Lema 3.26 afirma que no puede ser dividido por los generadores en \mathcal{F} , se sigue que es unión de clases de equivalencia de $\mathcal{R}(\sigma(\mathcal{F}))$. Luego V es R -cerrado. Ahora bien, si R fuese una bisimulación de estado, como $\{s, t\}$ es un generador disjunto de los demás elementos de \mathcal{F} , entonces $(s, t) \in R$. Luego por el Lema 3.20 debería ocurrir que $s \in \langle a \rangle V$ si y sólo si $t \in \langle a \rangle V$. Sin embargo $\delta_3 \in T_a(s) \cap \delta(V)$, por lo cual $s \in \langle a \rangle V$; mientras que por el otro lado $T_a(t) \cap \delta(V) = \emptyset$. Esto refuta la condición mencionada, e indica que R no es una bisimulación de estado. ■

Con este último resultado quedan demostradas las desigualdades de la ecuación (3.5). El caso de \mathbb{S}_2 es particularmente notorio: no sólo posee un espacio Borel estándar y es no probabilístico, sino que además el conjunto V que siembra el germen de la distinción entre las bisimulaciones es usualmente considerado un “buen” conjunto en teoría de la medida, puesto que es Borel estándar.

3.6. Resumen y conclusiones

En este capítulo se definió el modelo de los NLMP (semi-estructurados). Estos sistemas fueron introducidos como una generalización de otra clase de procesos denominados LMP, a los que se enriqueció permitiéndoles contemplar situaciones de no determinismo interno.

Se extendieron al nuevo modelo las nociones de bisimulación conocidas para los LMP, lo que resultó en tres clases de relaciones: tradicional, de estados y de eventos. Asimismo se habló de la interrelación existente entre estas bisimulaciones, y se presentó una lógica que caracteriza a la mayor de ellas, la bisimulación de evento.

En las últimas secciones se construyeron procesos que, aún a pesar de representar situaciones cotidianas y aparentemente inofensivas, consiguen demostrar que las tres nociones de bisimulación difieren.

Esos últimos resultados plantean un problema, ya que la idea detrás de toda relación de bisimulación es aproximadamente la misma: relacionar procesos con comportamientos *similares*, para alguna definición de la palabra. Sería deseable entonces que las bisimulaciones definidas no puedan ser distinguidas por sistemas tan sencillos.

¿Donde se encuentra el problema?, ¿es ésta una falla crucial de la teoría desarrollada? Afortunadamente las estructuras del modelo no son la causa de estas sorpresas. Pues como se dijo al comienzo de la Sección 3.5, los sistemas que verifican la desigualdad entre las bisimulaciones son prácticamente LTSs, con el añadido de una σ -álgebra, y por ende la posibilidad de tratar con un estado continuo de estados. Por el contrario, la búsqueda por la respuesta a los interrogantes planteados nos lleva, quizás inesperadamente, hacia el espacio de las etiquetas.

Recuérdese que, incluso en \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 , la bisimulación de evento está caracterizada por la lógica \mathcal{L} . Por lo tanto el hecho de que $s \sim_e t$ indica que las fórmulas de \mathcal{L} no pueden separar a los estados s y t . ¿Es natural dicho comportamiento? Notemos que hay una diferencia fácilmente apreciable entre ellos: s es capaz de saltar hacia un estado desde el cual resulta imposible realizar una nueva transición. En cambio todos los estados hacia los que puede saltar t tienen habilitado el paso hacia el estado x . Si se lograra expresar esto en términos de \mathcal{L} se dispondría de una fórmula que diferencie los estados problemáticos.

El Corolario 3.27 nos dice que nunca se hallará tal fórmula, veamos porqué. Sea $r \in [0, 1]$, entonces $\varphi = \langle a \rangle \neg [\langle r \rangle [\top]_{\geq 1}]_{\geq 1}$ caracteriza “los estados que pueden saltar, mediante a con probabilidad ≥ 1 , hacia un estado *que no puede volver a saltar*, mediante $r \in [0, 1]$ con probabilidad ≥ 1 ”. La fórmula φ nos apunta en la dirección correcta, pero por desgracia es satisfecha por ambos estados. Sea por ejemplo $r = \pi/4$. Entonces t puede saltar hacia 0 y s puede saltar hacia $f(0)$. Ambos estados destino (0 y $f(0)$) tienen habilitada únicamente la transición etiquetada con $0 \neq \pi/4$, por lo cual $s \models \varphi \wedge t \models \varphi$.

Este intento fallido brinda más información sobre el problema. Lo que la fórmula buscada debería expresar es aproximadamente: “los estados que pueden saltar, mediante a con probabilidad ≥ 1 , hacia un estado que no puede volver a saltar, mediante *ningún* $r \in [0, 1]$ con probabilidad ≥ 1 ”. Algo así como: $\langle a \rangle \neg [\langle [0, 1] \rangle [\top]_{\geq 1}]_{\geq 1}$. Por desgracia \mathcal{L} sólo permite referirse a etiquetas individuales.

Estas observaciones finales establecen la motivación y el objetivo de los próximos capítulos, y del trabajo de grado en general.

Capítulo 4

NLMP con estructura en las etiquetas

En este capítulo se revisa el concepto de NLMP introducido en la Definición 3.1 (página 24). En particular se extiende la estructura de los NLMP con una nueva σ -álgebra sobre el espacio de las etiquetas. Se incluyen aquí además una serie de resultados postergados de secciones anteriores del trabajo, como las motivaciones de los detalles de la definición de NLMP, y la prueba de que generalizan al modelo de los LMP.

4.1. Motivaciones estructurales

En la Definición 3.1 puede verse que hay dos propiedades esenciales que caracterizan a las funciones de transición no deterministas de todo NLMP: mapean estados en *medibles* de medidas, y son a su vez funciones medibles. Los siguientes dos ejemplos extraídos de [DSW11, sec. 3] explican la causa de estos requisitos. En ellos se asume que el espacio medible del NLMP correspondiente es Borel estándar.

Ejemplo 4.1. Sea $\mathcal{V} \doteq \{\delta_q \mid q \in V\}$, donde V es cualquier conjunto no-medible de Vitali en el $[0,1]$. Puede probarse que \mathcal{V} no es medible en $\Delta(\Sigma)$. Definamos $T_a(s) \doteq \mathcal{V}$ para todo estado $s \in [0,1]$. La resolución del no determinismo interno del modelo por medio de *schedulers* (ver Apéndice C) requiere que se le asignen probabilidades a todas las transiciones posibles, por ejemplo aquellas que se originan en el estado s con la etiqueta a . Pero esto es imposible, ya que supone otorgarle una medida al conjunto $T_a(s) = \mathcal{V}$, que como ya se dijo es no medible. Debe ser pues que $\forall s \in S . \forall a \in L . T_a(s) \in \Delta(\Sigma)$, como se pide en la Definición 3.1.

Ejemplo 4.2. Sea $T_a(s) \doteq \mu$ para alguna medida de probabilidad $\mu \in \Delta(S)$, y sea

$$T_b(s) \doteq \mathbf{if} (s \in V) \mathbf{then} \{\delta_1\} \mathbf{else} \emptyset, \quad (4.1)$$

para todo $s \in [0,1]$, donde $V \subseteq [0,1]$ es un conjunto de Vitali. Notar que los conjuntos $T_a(s), T_b(s)$ son ambos medibles de $\Delta(\Sigma)$ cualquiera sea el $s \in S$. Ahora bien, supóngase que un scheduler decide ejecutar primero la acción a y luego la b partiendo de cualquier estado $s \in S$. Se desea conocer la probabilidad de que tal secuencia de etiquetas sea ejecutada. La probabilidad (fija) $\mu \in \Delta(\Sigma)$ se asoció al hecho de hacer a desde el estado s . Eso significa que la probabilidad de caer en un subconjunto $X \subseteq S$ dado que se ejecutó

a partiendo de s es $\mu(X)$. Los únicos estados que pueden realizar la acción b son los de V , por lo cual sólo es posible realizar la secuencia $s \xrightarrow{a} \bigcirc \xrightarrow{b} \bigcirc$ si el estado intermedio está en V . Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Probabilidad buscada} &= P(s \xrightarrow{a} \bigcirc \xrightarrow{b} \bigcirc) \\ &= P(\text{caer en } V \text{ luego de hacer } a \text{ desde } s) \\ &= \mu(V) \\ &\therefore \text{imposible calcularla, pues } V \text{ es de Vitali} \end{aligned}$$

El problema del Ejemplo 4.2 surge de (la falta de) ciertas propiedades en la imagen inversa de T . El conjunto de estados que pueden ejecutar b está dado por $T_b^{-1}(H_{\Delta(s)}) = V$, y éste no es medible, lo que desbarata el cálculo del ejemplo. Esta es la razón por la cual se introduce el requerimiento de que para toda etiqueta $a \in L$ la función $T_a(\cdot) \in S \rightarrow \Delta(\Sigma)$ sea medible, como se hizo en la Definición 3.1.

Ya fue anticipado que la nueva definición para NLMP dada en la Sección 4.2 asocia una σ -álgebra al conjunto de etiquetas, lo que permite hablar de subconjuntos de L de forma estructurada. El siguiente ejemplo ilustra la necesidad de este proceder.

Ejemplo 4.3. Sean $S \doteq \{s, t\} \uplus [0, 1]$, $\Sigma \doteq \mathcal{B}(S)$, $L \doteq \{a\} \uplus [0, 1]$ y \mathbb{S} el NLMP $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ donde las transiciones son:

$$\begin{array}{ll} T_a(s) \doteq \{\mu\} & \text{donde } \mu \text{ tiene soporte en } [0,1] \text{ y es uniforme} \\ T_r(r) \doteq \{\delta_t\} & r \in [0, 1] \\ T_c(y) \doteq \emptyset & \text{para todo otro } c \in L, y \in S \end{array}$$

En la Figura 4.1 se presenta un esquema de \mathbb{S} para facilitar su comprensión. Tómesese ahora un conjunto de etiquetas $V \subseteq L$ que no sea medible en $\mathcal{B}([0, 1])$. Tratemos de calcular la probabilidad de hacer a y luego cualquiera de las acciones agrupadas en V .

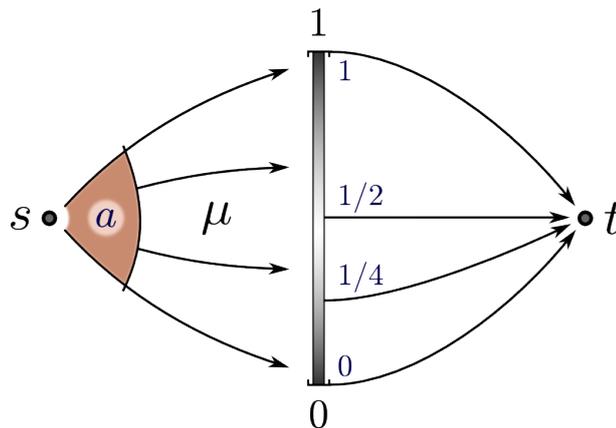


Figura 4.1: NLMP del Ejemplo 4.3

La definición de T asocia la única medida de probabilidad μ al hecho de realizar la acción a cuando se parte del estado s . Haciendo un uso circunstancialmente informal de la semántica definida en el Capítulo 6 para la lógica \mathcal{L} , aquí se simboliza con $\llbracket \langle A \rangle \psi \rrbracket$ al

conjunto de estados que pueden realizar cualquier acción del conjunto $A \subseteq L$, devolviendo medidas que satisfacen ψ . Por consiguiente lo que se desea calcular es $\mu(\llbracket \langle V \rangle [\top]_{\geq 1} \rrbracket)$. Nótese que las medidas que satisfacen \top con probabilidad mayor o igual a 1 son:

$$\llbracket [\top]_{\geq 1} \rrbracket = \Delta^{\geq 1}(S) = \{\nu \in \Delta(S) \mid \nu(S) \geq 1\} = \Delta(S)$$

Pero entonces resulta que:

$$\begin{aligned} \llbracket \langle V \rangle [\top]_{\geq 1} \rrbracket &= T^{-1} \left(H_{V \times \llbracket [\top]_{\geq 1} \rrbracket} \right) \\ &= T^{-1} \left(H_{V \times \Delta(S)} \right) \\ &= \{r \in [0, 1] \mid T(r) \cap (V \times \Delta(S)) \neq \emptyset\} \\ &= V \end{aligned}$$

Por ende la respuesta al interrogante planteado está dada por $\mu(V)$, lo cual es imposible de calcular *debido a que V no es un conjunto medible*

En ese último ejemplo el problema es el conjunto $V \subseteq L$. Con él se expresó, a través de una fórmula de \mathcal{L} , algo imposible de calcular. Restringir los conjuntos de etiquetas mediante una σ -álgebra Λ sobre L promete evitar tales situaciones.

4.2. El modelo

Las motivaciones que se acaban de mencionar, junto con la necesidad de ‘solucionar’ las desigualdades presentadas en la Sección 3.5, sugieren una serie de cambios sobre la Definición 3.1 (página 24) de proceso markoviano etiquetado no determinista.

A continuación se presenta formalmente el modelo desarrollado para responder tales demandas. Éste será el principal objeto de estudio en lo que resta del trabajo.

Definición 4.4. Sean (L, Λ) y (S, Σ) espacios medibles, y $\Delta(\Sigma)$ la σ -álgebra de Girny sobre el espacio de medidas $\Delta(S)$. Llamaremos *espacio de transiciones* sobre (Λ, Σ) , denotado $H(\Lambda \times \Delta(\Sigma))$, a la menor σ -álgebra que contiene a los generadores $H_{\lambda \times \xi}$, donde λ y ξ son medibles de Λ y $\Delta(\Sigma)$ respectivamente. Es decir:

$$H(\Lambda \times \Delta(\Sigma)) \doteq \sigma(\{H_{\lambda \times \xi} \mid \lambda \in \Lambda, \xi \in \Delta(\Sigma)\})$$

Definición 4.5. Un *proceso markoviano etiquetado no determinista*, o *NLMP* para abreviar, es una tupla $(S, \Sigma, L, \Lambda, T)$ donde (S, Σ) y (L, Λ) son espacios medibles, la σ -álgebra Λ contiene a los singuletes de L , y la función $T \in S \rightarrow \Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$ es medible en $(S, \Sigma) \rightarrow (\Lambda \otimes \Delta(\Sigma), H(\Lambda \times \Delta(\Sigma)))$. Usualmente se fija el conjunto de etiquetas L , y luego se habla simplemente del NLMP (S, Σ, Λ, T) .

En este trabajo nos interesan los sistemas en los que se puede expresar “presiono el botón a y veo qué ocurre”. Es por ello que en la Definición 4.5 se vuelve necesario exigir que $\{a\} \in \Lambda$ para toda acción $a \in L$. Incidentalmente dicha restricción enriquece al modelo con una serie de resultados sumamente útiles en el campo de las bisimulaciones, como se demuestra en el Capítulo 5.

Notar que ya no hay una función de transición no determinista por cada etiqueta de L . Ahora hay un único objeto que mapea los estados al mundo de las transiciones, expresamente T . La función T toma un estado, y devuelve un conjunto medible θ dentro del producto cartesiano entre etiquetas y medidas de probabilidad. Las etiquetas de θ serán las acciones habilitadas en el estado del que se partió. Las medidas de θ aparejadas a cada etiqueta hacen las veces de $T_a(\cdot) = \xi \in \Delta(\Sigma)$ del modelo semi-estructurado.

No obstante, el espacio de las etiquetas aún puede manipular acciones puntuales. Esto permitirá mantener casi sin modificaciones algunos de los conceptos definidos para el modelo semi-estructurado, en particular las bisimulaciones tradicional y de estado. Este aspecto se elabora con más detalle en el Capítulo 5.

4.2.1. Compatibilidad hacia atrás: LMPs

Hasta ahora se ha postergado la prueba de una propiedad mencionada en varias ocasiones: el hecho de que los LMPs son correctamente generalizados por los NLMPs, en particular los semi-estructurados. En esta sección se dan las pruebas formales de dicho resultado. La estrategia seguida es la misma que se emplea en [DSW11].

La noción que se intenta formalizar es que cualquier LMP puede ser visto como un NLMP sin el no determinismo interno. En términos de las transiciones esto significa que, para toda etiqueta $a \in L$ y estado $s \in S$, el conjunto $T_a(s)$ del LMP transformado en NLMP es visto como un singulete: $T_a(s) = \{\tau_a(s)\}$. Esto se formaliza en el Teorema 4.8.

Antes de proseguir obsérvese que la estrategia propuesta requiere que todo singulete $\{\mu\} \subseteq \Delta(S)$ sea un medible de $\Delta(\Sigma)$, pues de lo contrario el NLMP formado a partir de un LMP podría quedar mal definido. El siguiente lema ofrece condiciones suficientes para asegurar que tal cosa ocurra.

Lema 4.6. *Sea \mathcal{G} un π -system numerable en S (es decir, un subconjunto numerable de 2^S cerrado bajo intersección finita y que contiene a S). Entonces para toda $\mu \in \Delta(S)$ se tiene que $\{\mu\} \in \Delta(\sigma(\mathcal{G}))$*

Demostración. Gracias a un resultado de [Bil95] es suficiente con probar que la siguiente intersección es igual al singulete $\{\mu\}$:

$$\begin{aligned} & \left(\bigcap \{ \Delta^{>q}(Q) \mid Q \in \mathcal{G} \wedge q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \wedge q < \mu(Q) \} \right) \cap \dots \\ & \dots \cap \left(\bigcap \{ \Delta^{<q}(Q) \mid Q \in \mathcal{G} \wedge q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \wedge q > \mu(Q) \} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nótese que en (4.2) la intersección es numerable, puesto que se usan como índice los números racionales y los elementos de \mathcal{G} , que es un π -system numerable. Además por la forma en que la ecuación (4.2) fue construida no cabe duda de que μ está incluida en la intersección.

Sea ahora $\mu' \in \Delta(S)$ tal que $\mu' \neq \mu$. Por un teorema clásico sobre extensión de medidas de probabilidad ([Bil95, Teorema 3.3]) debe existir algún conjunto $Q \in \mathcal{G}$ tal que $\mu(Q) \neq \mu'(Q)$. Pero si $\mu'(Q) > \mu(Q)$ entonces μ' no está en la segunda parte de la ecuación (4.2), y si $\mu'(Q) < \mu(Q)$ entonces es la primera parte de (4.2) la que deja a μ' afuera. Se sigue que la intersección (4.2) es igual a $\{\mu\}$, que es a lo que se quería llegar. ■

Proposición 4.7. Sean (S, Σ) un espacio medible y $T_a(s) \doteq \{\tau_a(s)\}$ para todo estado $s \in S$ y etiqueta $a \in L$. Entonces $\tau_a \in S \rightarrow \Delta(S)$ es medible si y sólo si $T_a \in S \rightarrow \Delta(\Sigma)$ también lo es.

Demostración. Sean $s \in S, a \in L, \xi \in \Delta(\Sigma)$. Nótese que:

$$T_a(s) \in H_\xi \iff \{\tau_a(s)\} \cap \xi \neq \emptyset \iff \tau_a(s) \in \xi$$

lo cual prueba la igualdad $T_a^{-1}(H_\xi) = \tau_a^{-1}(\xi)$. Si $T_a(s)$ es medible entonces todo generador H_ξ satisface: $T_a^{-1}(H_\xi) \in \Sigma$, lo que por la igualdad anterior está diciendo que $\tau_a^{-1}(\xi) \in \Sigma$ para todo $\xi \in \Delta(\Sigma)$, es decir que τ_a es medible. Eso cubre el \Leftarrow). Para la vuelta recordemos que una función es medible sii su imagen inversa envía a los generadores de la σ -álgebra destino hacia medibles de la σ -álgebra origen. Pero eso es precisamente lo que nos dice la igualdad $T_a^{-1}(H_\xi) = \tau_a^{-1}(\xi)$, bajo la suposición de que τ_a es medible. Eso cubre el \Rightarrow). ■

La Proposición 4.7 y el Lema B.1 del Apéndice B demuestran la conexión existente entre la teoría de Desharnais y la desarrollada en este trabajo. El siguiente teorema resume los resultados.

Teorema 4.8. Sea (S, Σ) un espacio medible (para el cual existe un π -system numerable generador de Σ), y definamos $T_a(s) \doteq \{\tau_a(s)\}$ para todo estado $s \in S$ y etiqueta $a \in L$. Entonces $(S, \Sigma, L, \{\tau_a \mid a \in L\})$ es un LMP si y sólo si $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ es un NLMP semi-estructurado.

4.2.2. Compatibilidad hacia atrás: NLMPs semi-estructurados

A pesar de los problemas encontrados, y análogamente al caso de los LMPs, la teoría sobre los NLMP definida en el Capítulo 3 no sólo es ampliamente expresiva, sino que además cuenta con varios atractivos matemáticos. Todo esto hace que su extensión se considere sumamente provechosa.

Por fortuna la nueva definición para NLMP no supone ninguna ruptura con la teoría semi-estructurada. Por el contrario, el conjunto de los sistemas definidos en 4.5 es simplemente una restricción del modelo anterior. Esto es, todo NLMP estructurado puede ser visto como un NLMP semi-estructurado, donde dicha transformación preserva isomorfismos. Sin embargo la recíproca no es cierta en general. Aquí se demuestra esta inclusión estricta.

Estudiando la estructura de los elementos de ambos modelos (el semi-estructurado y el del presente capítulo) rápidamente se arriba a la conclusión de que la única diferencia se encuentra en las funciones de transición. Los NLMP semi-estructurados son indiferentes al hecho de si existe o no una σ -álgebra asociada al conjunto L , dado que cada etiqueta es considerada individualmente. El truco está entonces en relacionar de alguna manera las funciones $T_a \in S \rightarrow \Delta(\Sigma)$ con la función $T \in S \rightarrow \Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$.

Partamos primero de los NLMP con estructura en las etiquetas. La tarea consiste en construir una función de transición T_a empleando exclusivamente la función de transición T del modelo estructurado. Antes de formalizar esta idea veamos un par de conceptos útiles a tal fin.

Definición 4.9. Dados dos conjuntos A y B , para cada elemento $a \in A$ se define la función $\iota_a \in B \rightarrow A \times B$ como $\iota_a(b) = (a, b)$ para todo $b \in B$.

Lema 4.10. La función de la Definición 4.9 es medible. Es decir, dados (A, Σ_A) y (B, Σ_B) espacios medibles, $a \in A$, entonces: $\forall \theta \in \Sigma_A \otimes \Sigma_B . \iota_a^{-1}(\theta) \in \Sigma_B$

Demostración. Por un resultado estándar en teoría de la medida, basta con probar que dicha función envía los generadores de $\Sigma_A \otimes \Sigma_B$ a medibles de Σ_B [†]. Recuérdese que los generadores de una σ -álgebra producto son los rectángulos medibles, en este caso los $U \times V$ tal que $U \in \Sigma_A, V \in \Sigma_B$. Sean pues $a \in A, U \in \Sigma_A, V \in \Sigma_B$, luego:

$$\begin{aligned} \iota_a^{-1}(U \times V) &= \{b \in B \mid (a, b) \in U \times V\} \\ &= \begin{cases} \emptyset & , a \notin U \\ V & , a \in U \end{cases} \end{aligned}$$

Pero $\emptyset \in \Sigma_B$ por ser ésta una σ -álgebra, y $V \in \Sigma_B$ por hipótesis. ■

Dados dos espacios medibles (A, Σ_A) y (B, Σ_B) , para cada $a \in A$ se denomina *a-sección* a la función $(\cdot)|_a$ sobre la σ -álgebra producto $\Sigma_A \otimes \Sigma_B$ dada por la imagen inversa de la inyección ι_a . O sea que la *a-sección* de cada $\theta \in \Sigma_A \otimes \Sigma_B$ es el conjunto de elementos de B que en θ ocurren aparejados con a . Formalmente:

$$\begin{aligned} (\cdot)|_a &\in \Sigma_A \otimes \Sigma_B \rightarrow \Sigma_B \\ \theta|_a &\doteq \iota_a^{-1}(\theta) = \{b \in B \mid (a, b) \in \theta\} \end{aligned}$$

Esta función es precisamente lo que se necesita: para cada etiqueta $a \in L$, la *a-sección* en el modelo estructurado del resultado de $T(s)$, hace las veces de $T_a(s)$ para los NLMP semi-estructurados. De ahora en adelante se denota:

$$T|_a \doteq (T) \circ ((\cdot)|_a) \in S \rightarrow 2^{\Delta(S)}$$

El Lema 4.10 nos asegura que $T(\cdot)|_a$ mapea estados en medibles de $\Delta(\Sigma)$. Por ende lo único que falta para ver que la emulación lograda de T_a es completa es la medibilidad de $T|_a$, lo cual se demuestra en el siguiente lema.

Lema 4.11. Sea (S, Σ, Λ, T) un NLMP con estructura en las etiquetas. Entonces para toda acción a , la *a-sección* de T es una función medible. Formalmente:

$$\forall \xi \in \Delta(\Sigma) . T|_a^{-1}(H_\xi) \in \Sigma$$

Demostración. Sea ξ un medible de $\Delta(\Sigma)$. Nótese entonces que:

$$\begin{aligned} T|_a^{-1}(H_\xi) &= \{s \in S \mid T(s)|_a \cap \xi \neq \emptyset\} \\ &= \{s \in S \mid \{\mu \in T(s) \mid (a, \mu) \in T(s)\} \cap \xi \neq \emptyset\} \\ &= \{s \in S \mid T(s) \cap (\{a\} \times \xi) \neq \emptyset\} \\ &\doteq T^{-1}(H_{\{a\} \times \xi}) \end{aligned}$$

[†] Los interesados en la prueba pueden referirse al Teorema A.1 del Apéndice A.

Por otro lado, la Definición 4.5 exige que todo singulete $\{a\}$ sea medible para Λ , lo cual indica que el subíndice $\{a\} \times \xi$ en la última línea de la ecuación anterior es un rectángulo medible de $\Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$. Por último nótese que en la misma Definición 4.5 se establece que la función $T \in S \rightarrow \Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$ es medible, con lo cual se obtiene que $T^{-1}(H_{\{a\} \times \xi}) \in \Sigma$, que es a lo que se quería llegar. ■

Todos estos resultados atestiguan la contención enunciada al principio: cualquier NLMP con estructura en las etiquetas puede verse como un NLMP semi-estructurado. Falta ahora realizar el camino inverso: partir del modelo semi-estructurado y construir una función T empleando las transiciones T_a . Para ello se define un nuevo operador:

$$(\cdot)_\star \in (L \rightarrow S \rightarrow \Delta(\Sigma)) \rightarrow (S \rightarrow 2^L \otimes \Delta(\Sigma))$$

La idea detrás del operador $(\cdot)_\star$ es tomar un NLMP $(S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ del modelo semi-estructurado y llevar su familia $\{T_a \mid a \in L\}$ al espacio producto $2^L \otimes \Delta(\Sigma)$ mediante inyecciones de sus transiciones T_a dentro del producto cartesiano $L \times \Delta(S)$.

Notar que esto es independiente de cada etiqueta individual: $(\cdot)_\star$ trabaja a nivel de familia de funciones, *no* de transiciones individuales. Notacionalmente, dado un NLMP semi-estructurado conviene definir una función T_\star , resultado de aplicar el operador $(\cdot)_\star$ a la función T dada por:

$$\begin{aligned} T &\in L \rightarrow (S \rightarrow \Delta(\Sigma)) \\ T(a) &\doteq T_a \quad \forall a \in L \end{aligned}$$

Entonces por cada NLMP semi-estructurado habría una única función:

$$\begin{aligned} T_\star &\in S \rightarrow 2^L \otimes \Delta(\Sigma) \\ T_\star(s) &\doteq \{(a, \mu) \mid \exists a \in L . \mu \in T_a(s)\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $s \in S$. Obsérvese que:

$$T_\star(s) = \bigcup_{a \in L} \{\{a\} \times T_a(s) \mid T_a(s) \neq \emptyset\} \tag{4.4}$$

O sea que para todo estado $s \in S$, el conjunto $T_\star(s)$ es unión *arbitraria* de rectángulos $\{a\} \times \xi$. En cambio, los conjuntos $T(s)$ del modelo estructurado están restringidos a medibles en $\Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$. Esto hace que comience a asomar la sospecha de la desigualdad afirmada al principio.

En contraste con la observación anterior, mostraremos que la restricción ideada sobre las funciones T del mundo estructurado interactúa de la forma deseada con T_\star . Es decir que al aplicar la a -sección al resultado de una T_\star , lo que se obtiene es una T_a de los NLMP semi-estructurados. En otras palabras:

$$(T_\star)|_a \doteq (T_\star) \circ (\cdot|_a) = T_a$$

Veamos la prueba con cualquier $s \in S$:

$$\begin{aligned}
 ((T_\star) \circ (\cdot|_a)) (s) &= (T_\star(s))|_a \\
 &= \iota_a^{-1}(T_\star(s)) \\
 &= \{\mu \in \Delta(S) \mid (a, \mu) \in T_\star(s)\} \\
 &= \left\{ \mu \in \Delta(S) \mid (a, \mu) \in \bigcup_{b \in L} \{\{b\} \times T_b(s) \mid T_b(s) \neq \emptyset\} \right\} \\
 &= T_a(s)
 \end{aligned}$$

puesto que $(a, \mu) \in \{\{b\} \times T_b(s)\}$ si y sólo si $b = a$.

Es pertinente observar que estos cálculos se despliegan dentro del universo de los NLMP semi-estructurados, donde existen las transiciones T_a pero no existe la función $T \in S \rightarrow \Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$, que debe ser emulada mediante T_\star . Por fortuna la a -sección fue definida sobre conjuntos arbitrarios del espacio $L \times \Delta(S)$, gracias a lo cual no hubo ambigüedades a la hora de aplicarla sobre T_\star .

El caso inverso es mucho menos satisfactorio. El operador $(\cdot)_\star$ necesita una familia de transiciones T_a , inexistentes en el modelo estructurado. Pero incluso si se lo pudiese aplicar a algún NLMP con estructura en las etiquetas, seguiría existiendo un gran problema: el hecho de que una vez fijado el espacio (L, Λ) , no hay garantías de que $T_\star(s)$ ni de que T_\star sean medibles como conjunto y función respectivamente.

Evidentemente el operador $(\cdot)_\star$ deja mucho que desear, y en general no todo NLMP semi-estructurado puede ser visto como un NLMP estructurado a través de T_\star . Para demostrar la desigualdad entre ambos modelos se presenta un ejemplo concreto, que verifica que $T_\star(\cdot)$ no siempre emula las transiciones no deterministas de los NLMP con estructura en las etiquetas. Este resultado es independiente del espacio de etiquetas del proceso.

Ejemplo 4.12. Sea $\mathbb{S} \doteq (S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$ el NLMP semi-estructurado tal que:

$$\begin{aligned}
 S &= [0, 1] \uplus \{s, t\} \\
 \Sigma &= \mathcal{B}(S) \\
 L &= [0, 1] \\
 T_r(s) &= \{\delta_0\} & \forall r \in V \\
 T_r(r) &= \{\delta_t\} & \forall r \in [0, 1] \\
 T_c(y) &= \emptyset & \text{para todo otro } c \in L, y \in S
 \end{aligned}$$

donde $V \subseteq [0, 1]$ no es un conjunto Borel (i.e. $V \notin \Sigma$). La prueba de que \mathbb{S} efectivamente satisface las condiciones de la Definición 3.1 puede hallarse en el Apéndice B. La Figura 4.2 presenta un esquema del NLMP en cuestión.

Para ver que \mathbb{S} cae fuera del modelo de los NLMP estructurados, es necesario probar que T_\star no satisface las condiciones de la Definición 4.5, independientemente del espacio de etiquetas (L, Λ) escogido. Para ello se divide la prueba en dos casos: el que considera a V como un conjunto medible de etiquetas, y el que no lo hace.

Comencemos suponiendo que $V \in \Lambda$. Nótese que por construcción V no es medible si se lo considera como un conjunto de estados, pero sí lo es visto como conjunto de etiquetas.

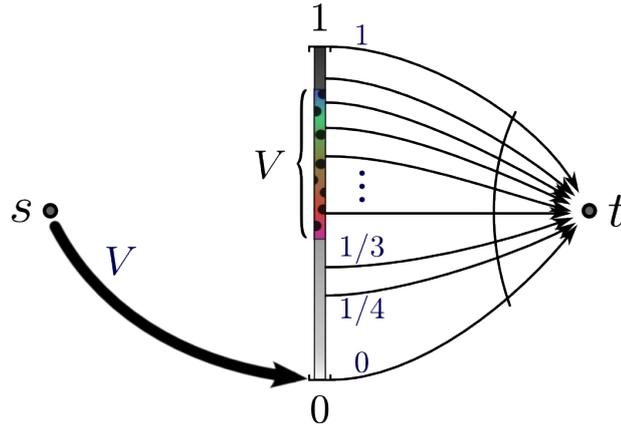


Figura 4.2: Proceso del Ejemplo 4.12

Ahora bien, dado que $V \times \Delta(S) \in \Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$, el conjunto de impactos $H_{V \times \Delta(S)}$ es un generador de la σ -álgebra $H(\Lambda \times \Delta(\Sigma))$. Por lo tanto si T_\star fuese medible, la imagen inversa de $H_{V \times \Delta(S)}$ para T_\star debería ser un conjunto medible del espacio (S, Σ) . Sin embargo:

$$\begin{aligned}
 T_\star^{-1}(H_{V \times \Delta(S)}) &= \{y \in S \mid T_\star(y) \cap (V \times \Delta(S)) \neq \emptyset\} \\
 &= \left\{ y \in S \mid \left(\bigcup_{a \in L} \{a\} \times T_a(y) \right) \cap (V \times \Delta(S)) \neq \emptyset \right\} \quad (\text{por Ec. 4.4}) \\
 &= \{s\} \cup \{y \in [0, 1] \mid \{(y, \delta_t)\} \cap (V \times \Delta(S)) \neq \emptyset\} \\
 &= \{s\} \cup V \\
 &\notin \Sigma
 \end{aligned}$$

Con eso queda demostrado que si $V \in \Lambda$, el proceso resultante $(S, \Sigma, L, \Lambda, T_\star)$ no es un NLMP con estructura en las etiquetas, independientemente de la estructura particular Λ .

Supongamos ahora que se da el caso opuesto, es decir: $V \notin \Lambda$. Para satisfacer las condiciones de la Definición 4.5, la transición T_\star debe mapear estados en medibles de $\Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$. Sin embargo:

$$\begin{aligned}
 T_\star(s) &= \{(a, \mu) \mid \exists a \in L. \mu \in T_a(s)\} && (\text{por Ec. 4.3}) \\
 &= \{(a, \mu) \mid a \in V \wedge \mu \in \{\delta_0\}\} \\
 &= \{V \times \delta_0\} \\
 &\notin \Lambda \otimes \Delta(\Sigma)
 \end{aligned}$$

Nuevamente entonces, el proceso resultante $(S, \Sigma, L, \Lambda, T_\star)$ no es un NLMP con estructura en las etiquetas, independientemente de las particularidades de la σ -álgebra Λ .

Se sigue que \mathbb{S} está fuera del modelo de los NLMP estructurados, lo cual verifica la desigualdad respecto del caso semi-estructurado, y prueba que la inclusión entre los modelos es estricta. Queda también demostrado que, como se sospechaba, la función T_\star es en general más laxa que las funciones de transición no determinísticas del modelo con estructura en las etiquetas.

4.3. Descarte del NLMP que distingue a \sim_t de las otras bisimulaciones

Una de las principales motivaciones para el desarrollo de la teoría de los NLMP con estructura en las etiquetas, es la búsqueda de una solución para los sistemas presentados en la Sección 3.5, que prueban las desigualdades entre \sim_t , \sim_s y \sim_e .

Las definiciones introducidas hasta este punto proveen del marco teórico suficiente para probar que el NLMP \mathbb{S}_1 de la Sub-sección 3.5.2, que en el modelo semi-estructurado permite diferenciar a \sim_t de las otras dos bisimulaciones, queda fuera del modelo estructurado.

Recuérdese que $\mathbb{S}_1 \doteq (S_1, \Sigma_1, L_1, \{T_c \mid c \in L_1\})$, donde los componentes son:

$$\begin{aligned}
 S_1 &\doteq [0, 1] \uplus [2, 3] \uplus \{s, t, x\} \\
 \Sigma_1 &\doteq \mathcal{B}(S_1) \\
 L_1 &\doteq \{a\} \uplus [0, 1] \\
 T_a(s) &\doteq \delta([2, 3]) \\
 T_a(t) &\doteq \delta([0, 1]) \\
 T_r(r) &\doteq \{\delta_x\} && \text{para los } r \in [0, 1] \\
 T_r(f(r)) &\doteq \{\delta_x\} && \text{para los } r \in [0, 1] \\
 T_c(y) &\doteq \emptyset && \text{para todo otro } c \in L_1, y \in S_1
 \end{aligned}$$

donde $\{s, t, x\} \subseteq \mathbb{R} \setminus [0, 3]$, V es un subconjunto no Borel dentro del intervalo $[2.5, 3]$, y $f \in [0, 1] \rightarrow [2, 3] \setminus V$ es una biyección.

Sea Λ_1 la σ -álgebra sobre las etiquetas escogida para transformar este proceso en un NLMP estructurado. Como Λ_1 debe contener todos los singuletes, en particular $\{a\} \in \Lambda_1$, y en consiguiente $[0, 1] = \{a\}^c \in \Lambda_1$. Nótese que esto no depende de las particularidades de Λ_1 : toda σ -álgebra sobre las etiquetas de \mathbb{S}_1 *debe contener al conjunto* $[0, 1]$.

Además de aparejar a L_1 con una σ -álgebra, es necesario reemplazar la familia de transiciones $\{T_c \mid c \in L_1\}$ por una única función de transición no determinista. Para ello se emplea la “extensión” T_\star definida en la ecuación (4.3). Por lo tanto las transiciones serán: $T_\star \in S_1 \rightarrow \Lambda_1 \otimes \Delta(\mathcal{B})$, donde $\mathcal{B} \doteq \mathcal{B}([0, 1] \uplus [2, 3] \uplus \{s, t, x\}) = \Sigma_1$.

Nótese entonces que:

$$\begin{aligned}
 [0, 1] &\in \Lambda_1 \\
 &\Downarrow \\
 [0, 1] \times \Delta(S_1) &\in \Lambda_1 \otimes \Delta(\Sigma_1) \\
 &\Downarrow \\
 H_{[0,1] \times \Delta(S_1)} &\in H(\Lambda_1 \times \Delta(\Sigma_1))
 \end{aligned}$$

Como la definición de NLMP estructurado requiere que la función de transición sea medible respecto de los espacios (S, Σ) y $(\Lambda_1 \otimes \Delta(\Sigma_1), H(\Lambda_1 \times \Delta(\Sigma_1)))$, la imagen inversa de $H_{[0,1] \times \Delta(S_1)}$ según T_\star debe ser un elemento de \mathcal{B} para que \mathbb{S}_1 pueda ser considerado un

NLMP con estructura en las etiquetas. Sin embargo:

$$\begin{aligned}
 T_{\star}^{-1}(H_{[0,1] \times \Delta(S)}) &= \{s \in S_1 \mid T_{\star}(s) \in H_{[0,1] \times \Delta(S_1)}\} \\
 &= \{s \in S_1 \mid T_{\star}(s) \cap ([0, 1] \times \Delta(S_1)) \neq \emptyset\} \\
 &= [0, 1] \cup ([2, 3] \setminus V) \\
 &\notin \mathcal{B}
 \end{aligned} \tag{*}$$

(*) pues la imagen de f es $[2, 3] \setminus V$, y para cada $r \in [0, 1]$ y $\xi \in \Delta(\mathcal{B})$ se tiene:

$$T_{\star}|_r(s) = T_r(s) = \begin{cases} \{\delta_x\} & \text{si } s \in \{r, f(r)\} \\ \emptyset & \text{si } s \notin \{r, f(r)\} \end{cases}$$

Esto significa que S_1 no cumple con los requisitos necesarios para ser considerado un NLMP estructurado, con lo cual se descartan (en el nuevo modelo y sólo de manera circunstancial) las desigualdades $\sim_t \neq \sim_s$ y $\sim_t \neq \sim_e$ demostradas en el Teorema 3.23.

Es importante observar que este resultado se basa en que el espacio de etiquetas (L_1, Λ_1) considera al $[0, 1]$ como un conjunto medible. Sin embargo vimos que la definición misma de NLMP estructurado exige que eso ocurra, indiferentemente del Λ_1 escogido. Se sigue que S_1 es otro ejemplo de un NLMP semi-estructurado que no puede ser transformado en un NLMP con estructura en las etiquetas.

4.4. Resumen

En este capítulo se modificó el concepto de NLMP de la Definición 3.1, añadiéndole una nueva σ -álgebra, esta vez sobre el espacio de etiquetas. Se denomina *NLMP con estructura en las etiquetas* a los procesos del nuevo modelo, o simplemente *NLMPs estructurados*, para diferenciarlos de los NLMPs semi-estructurados del Capítulo 3.

Se presentaron algunos casos concretos que motivan el estudio y el desarrollo de la teoría de los NLMP en general, y del caso estructurado en particular. También se dieron las pruebas de que los NLMP son una generalización correcta de los LMPs al universo de los procesos no deterministas, y de que el modelo estructurado es una particularización del caso semi-estructurado.

Finalmente se demostró que el contraejemplo S_1 , en el cual fue posible distinguir a \sim_t de las otras dos bisimulaciones, no es considerado un NLMP según la Definición 4.5. Por lo tanto junto con S_1 se esfuman, por el momento, las desigualdades $\sim_t \neq \sim_s$ y $\sim_t \neq \sim_e$.

En lo que resta del trabajo se adecuarán las definiciones de bisimulación tradicional, de estado y de evento al modelo de los NLMP estructurados. Luego se modificará la lógica \mathcal{L} con el mismo fin, y se demostrará que el contraejemplo S_2 no sirve como prueba de que $\sim_s \neq \sim_e$. A diferencia de lo que ocurre con S_1 , dicho proceso sí puede ser visto como un NLMP estructurado. Sin embargo la σ -álgebra que acompaña al conjunto de las etiquetas permite que la nueva lógica separe estados antes indistinguibles para \sim_e .

Capítulo 5

Bisimulaciones revisadas

Como ya se dijo, la distinción de singuletes por parte del espacio de las etiquetas permite mantener intactos algunos de los conceptos de la teoría semi-estructurada de los NLMP. Otros, por su parte, deben ser modificados para adecuarse a los cambios de la estructura. En el presente capítulo se aborda dicha temática.

5.1. Las definiciones

Comencemos por la más fuerte de las nociones: la bisimulación tradicional. En el mundo de los NLMP semi-estructurados las relaciones de esta clase hilaban muy fino: llegaban hasta el nivel de las acciones y las medidas individuales. Para cada par (s, t) de estados a vincular exigían que, etiqueta por etiqueta, cada una de las medidas de $T_a(s)$ tenga una medida asociada en $T_a(t)$ y viceversa.

Afortunadamente la operación ‘ a -sección’ le permite a los NLMP estructurados expresar exactamente la misma idea. Y es natural mantener la definición, dada la relación de inclusión que existe entre los modelos.

Definición 5.1. Una relación $R \subseteq S \times S$ es una *bisimulación tradicional* sobre un NLMP de estructura (S, Σ, Λ, T) sii es simétrica y para cada par de estados $s, t \in S$ y etiqueta $a \in L$ satisface:

$$s R t \implies T(s)|_a R T(t)|_a$$

Un par de estados $s, t \in S$ son *tradicionalmente bisimilares*, denotado $s \sim_t t$, si existe alguna relación de bisimulación tradicional R tal que $s R t$.

Recuérdese que la notación “ $T(s)|_a R T(t)|_a$ ” denota al predicado:

$$\forall \mu \in T(s)|_a . \exists \nu \in T(t)|_a . \mu R \nu \quad \text{y viceversa}$$

donde a su vez $\mu R \nu \iff \forall Q \in \Sigma(R) . \mu(Q) = \nu(Q)$.

En el caso de la bisimulación de estado, también puede usarse la a -sección para reproducir la misma noción del modelo semi-estructurado. Si s, t son los estados a relacionar, y R la bisimulación de estado, esto significa que la condición $s R t$ debe asegurarnos que:

$$\forall a \in L . \forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . T(s)|_a \cap \xi \neq \emptyset \iff T(t)|_a \cap \xi \neq \emptyset \quad (5.1)$$

Ahora bien, si se revisan los argumentos con los que se introdujo la bisimulación de estado en la Sección 3.2, se recordará que uno de los principales era el descuido, por parte de la bisimulación tradicional, de manipular conjuntos de medidas potencialmente no medibles para $\Delta(\Sigma)$.

Este problema se solucionó añadiendo la condición $\xi \in \Delta(\Sigma(R))$ a la hora de determinar cuales conjuntos de medidas considerar. En el modelo de los NLMP estructurados sin embargo hay un nuevo espacio medible a tener en cuenta: el de las etiquetas.

Si bien por definición todos los singuletes de acciones son medibles para la σ -álgebra Λ , podría resultar inapropiado restringirse sólo a ellos para la definición de bisimulación de estado. Esto nos da otra posibilidad que generaliza la condición (5.1):

$$\forall \lambda \in \Lambda . \forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . T(s) \cap (\lambda \times \xi) \neq \emptyset \Leftrightarrow T(t) \cap (\lambda \times \xi) \neq \emptyset \quad (5.2)$$

Por último nótese que la función de transición T tiene a la σ -álgebra producto $\Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$ como imagen. Esto podría interpretarse como que incluso la ecuación (5.2), que considera todos los rectángulos medibles, no es lo suficientemente general, y que lo óptimo sería cuantificar sobre todos los elementos de la imagen de T . Esto nos da una tercera posibilidad:

$$\forall \theta \in \Lambda \otimes \Delta(\Sigma(R)) . T(s) \cap \theta \neq \emptyset \Leftrightarrow T(t) \cap \theta \neq \emptyset \quad (5.3)$$

Se dispone pues de al menos tres opciones con las que definir la bisimulación de estado: las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3). Por fortuna no será necesario decidir cual es la que mejor se ajusta al nuevo modelo, ya que todas ellas son equivalentes, como lo prueba el siguiente teorema.

Teorema 5.2. *Sean (S, Σ, Λ, T) un NLMP con estructura en las etiquetas, s, t dos estados de S , y $R \subseteq S \times S$ una relación simétrica sobre el espacio de estados. Las siguientes caracterizaciones de R son equivalentes:*

- I) $s R t \Rightarrow$
 $\forall a \in L . \forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . T(s)|_a \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow T(t)|_a \cap \xi \neq \emptyset$
- II) $s R t \Rightarrow$
 $\forall \lambda \in \Lambda . \forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . T(s) \cap (\lambda \times \xi) \neq \emptyset \Leftrightarrow T(t) \cap (\lambda \times \xi) \neq \emptyset$
- III) $s R t \Rightarrow$
 $\forall \theta \in \Lambda \otimes \Delta(\Sigma(R)) . T(s) \cap \theta \neq \emptyset \Leftrightarrow T(t) \cap \theta \neq \emptyset$

Demostración. Como $\{a\} \times \xi$ es un tipo especial de rectángulo medible, y $\lambda \times \xi$ es un tipo especial de conjunto medible de $\Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$, por particularización se desprende de manera directa que I) \Leftrightarrow II) \Leftrightarrow III). Entonces para probar la equivalencia buscada bastará con demostrar que I) \Rightarrow III).

Sean $s, t \in S$ y $\theta \in \Lambda \otimes \Delta(\Sigma(R))$ tales que $s R t$ y $T(s) \cap \theta \neq \emptyset$, queremos probar que necesariamente $T(t) \cap \theta \neq \emptyset$. Como $T(s) \cap \theta \subseteq L \times \Delta(S)$, la hipótesis nos asegura que existen $a \in L, \mu \in \Delta(S)$ tales que $(a, \mu) \in T(s) \cap \theta$. Sabemos que $\{a\} \in \Lambda$, y

en consecuencia $(\{a\} \times \Delta(S)) \cap \theta \in \Lambda \otimes \Delta(\Sigma(R))$. Luego por un resultado estándar de teoría de la medida ([Ash99, p. 102]) puede asegurarse que

$$\exists \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . ((\{a\} \times \Delta(S)) \cap \theta)|_a = \xi$$

A su vez como la medida μ fue tomada de la segunda coordenada de θ debe ser que $\mu \in \xi$. Luego $(a, \mu) \in T(s) \cap (\{a\} \times \xi)$ y en consecuencia $T(s) \cap (\{a\} \times \xi) \neq \emptyset$, lo cual por 1) indica que $T(t) \cap (\{a\} \times \xi) \neq \emptyset$. Como por construcción $(\{a\} \times \xi) \subseteq \theta$, debe ser que $T(t) \cap \theta \neq \emptyset$, que es precisamente lo que se quería demostrar. La implicación $T(t) \cap \theta \neq \emptyset \Rightarrow T(s) \cap \theta \neq \emptyset$ es una consecuencia inmediata de la simetría de R . ■

El Teorema 5.2 permite escoger cualquiera de las tres ecuaciones ((5.1), (5.2) ó (5.3)) para definir a la bisimulación de estado. Luego a la hora de probar algún resultado puede emplearse el formato que más se adecúe a la prueba particular.

Definición 5.3. Una relación $R \subseteq S \times S$ es una *bisimulación de estado* en un NLMP (S, Σ, Λ, T) sii es simétrica y para cada par de estados $s, t \in S$ y etiqueta $a \in L$ satisface:

$$s R t \implies \forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . T(s)|_a \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow T(t)|_a \cap \xi \neq \emptyset$$

Se dice que $s, t \in S$ son *estados bisimilares*, denotado $s \sim_s t$, si existe alguna relación de bisimulación de estado R tal que $s R t$.

Queda por introducir la bisimulación de evento. Ésta será definida en un estilo análogo al del modelo semi-estructurado, teniendo en cuenta las modificaciones en los espacios medibles sobre los que opera la función de transición.

Definición 5.4. Una *bisimulación de evento* en un NLMP de estructura (S, Σ, Λ, T) es una sub- σ -álgebra $\Xi \subseteq \Sigma$ para la cual la función de transición no determinista $T \in (S, \Xi) \rightarrow (\Lambda \otimes \Delta(\Sigma), H(\Lambda \times \Delta(\Xi)))$ es medible.

En analogía con el modelo anterior, la notación $H(\Lambda \times \Delta(\Xi))$ hace referencia a la sub- σ -álgebra de $H(\Lambda \times \Delta(\Sigma))$ generada por la “colección de conjuntos de impactos” $\{H_{\lambda \times \xi} \mid \lambda \in \Lambda \wedge \xi \in \Delta(\Xi)\}$. Aquí también se extiende la noción al mundo de las relaciones. Una bisimulación de evento $R \subseteq S \times S$ es cualquier relación R sobre el espacio de estados, para la cual existe una bisimulación de evento $\Xi \subseteq \Sigma$ tal que $R = \mathcal{R}(\Xi)$. Se dice que dos estados $s, t \in S$ son *bisimilares por eventos*, denotado $s \sim_e t$, si existe alguna bisimulación de evento Ξ tal que $s \mathcal{R}(\Xi) t$.

5.2. Su interrelación

En la Sección 3.4 se enumeraron una serie de resultados sobre las bisimulaciones para el modelo de los NLMP semi-estructurados. Aquí se provee de las pruebas correspondientes en el contexto de los NLMP con estructura en las etiquetas.

Se comienza por la propiedad fundamental que establece la relación entre las bisimulaciones de estado y de evento. Aquí y por el resto de la sección se asume la existencia de un NLMP estructurado $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \Lambda, T)$.

Lema 5.5. *Si $R \subseteq S \times S$ es una relación simétrica, entonces R es una bisimulación de estado si y sólo si $\Sigma(R)$ es una bisimulación de evento.*

Demostración. Puesto que R es simétrica entonces $\Sigma(R)$ es una sub- σ -álgebra de Σ . El hecho de que $\Sigma(R)$ sea una bisimulación de evento equivale entonces a demostrar que:

$$\forall \lambda \in \Lambda . \forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . T^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) \in \Sigma(R)$$

La condición de medibilidad que T satisface por ser \mathbb{S} un NLMP estructurado nos asegura que $T^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) \in \Sigma$. Por lo tanto sólo hay que probar que dicho conjunto es R -cerrado. Se tiene entonces que:

$\Sigma(R)$ es bisimulación de evento

\Downarrow

$$\forall \lambda \in \Lambda . \forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . R\text{-cerrado}(T^{-1}(H_{\lambda \times \xi}))$$

\Downarrow pues R es simétrica

$$\forall \lambda \in \Lambda . \forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . \forall s, t \in S . s R t \implies s \in T^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) \Leftrightarrow t \in T^{-1}(H_{\lambda \times \xi})$$

$$\Downarrow T^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) = \{r \mid T(r) \cap (\lambda \times \xi) \neq \emptyset\}$$

$$\forall \lambda \in \Lambda . \forall \xi \in \Delta(\Sigma(R)) . \forall s, t \in S .$$

$$s R t \implies T(s) \cap (\lambda \times \xi) \neq \emptyset \Leftrightarrow T(t) \cap (\lambda \times \xi) \neq \emptyset$$

\Downarrow por Teo. 5.2

R es bisimulación de estado ■

Esa relación entre las bisimulaciones de estado y de evento establece los fundamentos con los que eventualmente se prueba la inclusión $\sim_s \subseteq \sim_e$. Veamos ahora un par de resultados intermedios, también dentro del ámbito de los vínculos entre dichas bisimulaciones.

Lema 5.6. *Sea R una bisimulación de estado. Entonces:*

- I) $\mathcal{R}(\Sigma(R))$ es bisimulación de estado y de evento
- II) R es bisimulación de evento si y sólo si $R = \mathcal{R}(\Sigma(R))$
- III) Si las clases de equivalencia de R son medibles en Σ , R es bisimulación de evento

Demostración. I) Como por hipótesis R es una bisimulación de estado, el Lema 5.5 dice que $\Sigma(R)$ es bisimulación de evento. Luego $\tilde{R} \doteq \mathcal{R}(\Sigma(R))$ es bisimulación de evento por definición. Por otro lado la forma en que se definió la “relación inducida” \mathcal{R} asegura que si Ξ es una σ -álgebra entonces $\mathcal{R}(\Xi)$ es una relación de equivalencia, luego \tilde{R} es simétrica. Y por la Proposición 2.17 v) se tiene que $\Sigma(R) = \Sigma(\mathcal{R}(\Sigma(R))) = \Sigma(\tilde{R})$. Esto último, junto con el Lema 5.5 y el hecho de que $\Sigma(R)$ es una bisimulación de evento, es suficiente para afirmar que \tilde{R} es una bisimulación de estado.

II) El \Leftarrow) es el inciso anterior. Para el \Rightarrow) notemos que si R es una bisimulación de evento, entonces debe existir una sub- σ -álgebra $\Xi \subseteq \Sigma$ que cumpla con los requisitos de la Definición 5.4, y tal que $R = \mathcal{R}(\Xi)$. Luego por la Proposición 2.17 IV) se tiene que $R = \mathcal{R}(\Xi) = \mathcal{R}(\Sigma(\mathcal{R}(\Xi))) = \mathcal{R}(\Sigma(R))$.

III) La hipótesis dice que $S/R \subseteq \Sigma$. Observando que R es una relación de equivalencia por ser una bisimulación de estado, puede asegurarse por la Proposición 2.17 III) que $R = \mathcal{R}(\Sigma(R))$. Luego, por el inciso anterior, R es una bisimulación de evento. ■

Recuérdese que, dado un NLMP \mathbb{S} , \sim_s denota la unión de todas las relaciones de bisimulación de estado en \mathbb{S} . De la misma manera se definen \sim_e y \sim_t para las bisimulaciones de estado y tradicional respectivamente. Notar que \sim_e emplea la noción de bisimulación de evento como relación, y no como σ -álgebra. El siguiente teorema presenta tres de las características más importantes de \sim_s .

Teorema 5.7. *La relación \sim_s es:*

- I) *la mayor bisimulación de estado*
- II) *una bisimulación de evento (luego $\sim_s \subseteq \sim_e$)*
- III) *una relación de equivalencia*

Demostración. I) Sean s, t dos estados cualesquiera de S . En este inciso se busca demostrar la implicación:

$$s \sim_s t \implies \forall a \in L . \forall \xi \in \Delta(\Sigma(\sim_s)) . T(s)|_a \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow T(t)|_a \cap \xi \neq \emptyset \quad (5.4)$$

Sea pues $a \in L$ y supongamos que $s \sim_s t$. Lo segundo indica que hay una bisimulación de estado R tal que para todo $\xi \in \Delta(\Sigma(R))$ se satisface $T(s)|_a \cap \xi \neq \emptyset \Leftrightarrow T(t)|_a \cap \xi \neq \emptyset$. Lo que hay que probar aquí es precisamente esa doble implicación pero sobre todos los medibles de $\Delta(\Sigma(\sim_s))$. Ahora bien, como $R \subseteq \sim_s$ la proposición 2.16 II) asegura que se cumple la inclusión $\Delta(\Sigma(R)) \supseteq \Delta(\Sigma(\sim_s))$. Entonces el ξ de la doble implicación anterior ya estaba considerando todos los medibles de $\Delta(\Sigma(\sim_s))$, lo cual indica que la implicación (5.4) es satisfecha. Eso nos dice que \sim_s es una bisimulación de estado, y por construcción es la mayor de todas ellas.

II) El Lema 5.6 II) nos asegura que alcanza con probar que $\sim_s = \mathcal{R}(\Sigma(\sim_s))$. La Proposición 2.17 II) ya nos da la contención $\sim_s \subseteq \mathcal{R}(\Sigma(\sim_s))$; para ver la otra inclusión basta con demostrar que $R \doteq \mathcal{R}(\Sigma(\sim_s))$ es una bisimulación de estado. A su vez, por el Lema 5.5 eso equivale a probar que $\Sigma(R)$ es una bisimulación de evento. Nótese ahora que, por ser \sim_s una bisimulación de estado (inciso I)) y gracias nuevamente al Lema 5.5, $\Sigma(\sim_s)$ necesariamente debe ser una bisimulación de evento. Por la Proposición 2.17 V) $\Sigma(R) = \Sigma(\mathcal{R}(\Sigma(\sim_s))) = \Sigma(\sim_s)$. Se puede concluir entonces que \sim_s efectivamente es un bisimulación de evento, y por consiguiente que $\sim_s \subseteq \sim_e$.

III) Este resultado se desprende directamente del inciso I), y de que las relaciones de bisimulación de estado fueron definidas en función del operador lógico ' \Leftrightarrow ' (el cual es reflexivo, simétrico y transitivo). ■

Pasemos ahora a la bisimulación que fue introducida en primer lugar en la sección anterior, y que aún no ha sido objeto de estudio en ésta. El siguiente enunciado termina de describir los vínculos existentes entre las tres bisimulaciones.

Teorema 5.8. *Si $R \subseteq S \times S$ es una bisimulación tradicional, entonces también es una bisimulación de estado (luego $\sim_t \subseteq \sim_s$)*

Demostración. Sean pues R una bisimulación tradicional y s, t dos estados cualesquiera de S tales que $s R t$. Tómesese ahora cualquier $\xi \in \Delta(\Sigma(R))$ tal que $T(s)|_a \cap \xi \neq \emptyset$. Lo que se busca demostrar es que necesariamente $T(t)|_a \cap \xi \neq \emptyset$. Se supone entonces que hay alguna medida de probabilidad $\mu \in T(s)|_a$ que también pertenece a ξ . Luego por hipótesis $\exists \nu \in T(t)|_a$ tal que $\mu R \nu$. Por la Propiedad B.2 del Apéndice B se tiene que R -cerrado(ξ), lo cual indica que $\nu \in \xi$. Pero entonces $\nu \in T(t)|_a \cap \xi$, y en consecuencia $T(t)|_a \cap \xi \neq \emptyset$, que es precisamente a lo que se quería llegar. La prueba de la recíproca es inmediata por simetría de R . ■

Con ese último teorema queda demostrada la cadena de inclusiones:

$$\sim_t \subseteq \sim_s \subseteq \sim_e$$

Para concluir la sección se presenta un resultado que en el capítulo de los NLMP semi-estructurados fue catalogado como la “coherencia” de las relaciones \sim_t , \sim_s y \sim_e .

Proposición 5.9.

- a) \sim_t es una bisimulación tradicional
- b) \sim_s es una bisimulación de estado
- c) \sim_e es una bisimulación de evento

Demostración. a) Sean $s, t \in S$ tales que $s \sim_t t$ y escójase arbitrariamente una acción $a \in L$. Por hipótesis existe alguna bisimulación tradicional $R \subseteq S \times S$ tal que $s R t$, lo que significa que se cumple el predicado:

$$\forall \mu \in T(s)|_a . \exists \nu \in T(t)|_a . \forall Q \in \Sigma(R) . \mu(Q) = \nu(Q) \quad (5.5)$$

y también su análogo ($\forall \nu \in T(t)|_a . \exists \mu \in T(s)|_a$ etc.). Ahora bien, como $R \subseteq \sim_t$ entonces por la Proposición 2.16 I) se tiene que $\Sigma(R) \supseteq \Sigma \sim_t$. Pero eso significa que los medibles $Q \in \Sigma(R)$ del predicado (5.5) y su análogo también recorren toda la σ -álgebra $\Sigma(\sim_t)$. Es decir:

$$\forall \mu \in T(s)|_a . \exists \nu \in T(t)|_a . \forall Q \in \Sigma(\sim_t) . \mu(Q) = \nu(Q)$$

y lo mismo para el caso análogo. Empleando la notación de la Sección 5.1 el predicado anterior se reduce a: $T(s)|_a \sim_t T(t)|_a$, lo que se dedujo como consecuencia del hecho $s \sim_t t$. Esto significa que \sim_t es una bisimulación tradicional. ✓

b) Es el Teorema 5.7 I). ✓

c) Esta prueba puede realizarse en muy pocas líneas, una vez demostrada la caracterización de \sim_e por parte de una lógica que aún no se introdujo. Por ello la demostración se posterga para el Capítulo 6, donde se la presenta bajo el nombre de Corolario 6.9 (página 68). ■

5.3. Resumen

En este capítulo se redefinieron las bisimulaciones tradicional, de estado y de evento, adecuándolas al modelo de los NLMP con estructura en las etiquetas. Se habló además de los vínculos que existen entre ellas, y con el Teorema 5.8 se terminó de demostrar la cadena de inclusiones, que ya había sido enunciada en el Capítulo 3 para el modelo semi-estructurado, y que se repite para el caso estructurado. Es decir:

$$\sim_t \subseteq \sim_s \subseteq \sim_e$$

Con esto se cierra la lista de resultados que hablan de la relación entre las bisimulaciones. Sin embargo todavía faltan por cubrir dos puntos importantes: la definición de una lógica que caracterice la relación \sim_e , y la prometida prueba de que en el caso de un no determinismo finito las tres nociones de bisimulación coinciden. Estos temas se tratan en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

La lógica

Aquí se introducen la sintaxis y la semántica de una nueva lógica denotada \mathcal{L} . La diferencia entre ésta y la \mathcal{L} de la Sección 3.3 se da en una sola de las construcciones básicas: ahora es posible referirse a conjuntos (medibles) de etiquetas a la hora de expresar “*determinado estado tiene habilitadas las acciones ...*”.

También se incluyen en este capítulo dos resultados de gran interés: el primero prueba que dentro del modelo estructurado, el contraejemplo \mathbb{S}_2 falla a la hora de probar la desigualdad $\sim_s \neq \sim_e$. El segundo demuestra que \mathcal{L} caracteriza por completo a las tres bisimulaciones cuando los NLMP considerados son *de imagen finita*.

6.1. Definición

Al igual que la lógica presentada para los NLMP semi-estructurados, la que aquí se introduce considera dos tipos de fórmulas: las que se interpretan como conjuntos de estados, y las que se interpretan como conjuntos de medidas.

\mathcal{L} denota las producciones del primer tipo mencionado, y \mathcal{L}_Δ denota las que hablan sobre medidas de probabilidad. Si (S, Σ, Λ, T) es un NLMP estructurado, la sintaxis de la lógica es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \quad \varphi &\equiv \top \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \langle \lambda \rangle \psi \\ \mathcal{L}_\Delta : \quad \psi &\equiv \bigvee_{i \in I} \psi_i \mid \neg \psi' \mid [\varphi]_{\geq q} \end{aligned}$$

donde $\lambda \in \Lambda$, I es un conjunto finito o numerable, y $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Escribiremos $\langle a \rangle \psi$ en lugar de $\langle \{a\} \rangle \psi$.

Las fórmulas de \mathcal{L} se interpretan como conjuntos de estados de S , y las de \mathcal{L}_Δ como conjuntos de medidas de probabilidad sobre (S, Σ) . Formalmente la semántica se define:

$$\begin{aligned} \llbracket \top \rrbracket &\doteq S & \llbracket \bigvee_{i \in I} \psi_i \rrbracket &\doteq \bigcup_{i \in I} \llbracket \psi_i \rrbracket \\ \llbracket \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rrbracket &\doteq \llbracket \varphi_1 \rrbracket \cap \llbracket \varphi_2 \rrbracket & \llbracket \neg \psi' \rrbracket &\doteq \llbracket \psi' \rrbracket^c \\ \llbracket \langle \lambda \rangle \psi \rrbracket &\doteq T^{-1}(H_{\lambda \times \llbracket \psi \rrbracket}) & \llbracket [\varphi]_{\geq q} \rrbracket &\doteq \Delta^{\geq q}(\llbracket \varphi \rrbracket) \end{aligned}$$

donde $H_{\lambda \times \llbracket \psi \rrbracket}$ es la colección de conjuntos de medidas que impactan con el rectángulo $\lambda \times \llbracket \psi \rrbracket$. Para que esto tenga sentido debe ocurrir que $\llbracket \psi \rrbracket \in \Delta(\Sigma)$.

Notar que $\langle \lambda \rangle \psi$ es válida en un estado s cuando hay alguna medida $\mu \in T(s)|_a$ tal que $\mu \models \psi$, y donde $a \in \lambda$. Es decir que $s \models \langle \lambda \rangle \psi$ si y sólo si hay alguna medida alcanzable desde s (a través de alguna acción de λ) que satisfaga la condición ψ . Por otro lado la fórmula $[\varphi]_{\geq q}$ es válida para una medida μ si y sólo si $\mu(\llbracket \varphi \rrbracket) \geq q$. Pero para aplicar una medida a un subconjunto de S este último debe ser medible en Σ .

Entonces, al igual que antes, para toda $\varphi \in \mathcal{L}$ y $\psi \in \mathcal{L}_\Delta$ se requiere que ambos $\llbracket \varphi \rrbracket$ y $\llbracket \psi \rrbracket$ sean medibles según los espacios (S, Σ) y $(\Delta(S), \Delta(\Sigma))$ respectivamente.

Esto era debidamente satisfecho por la lógica definida sobre los NLMP semi-estructurados, y la única diferencia entre ella y la nueva \mathcal{L} son las fórmulas de la forma $\langle \lambda \rangle \psi$. Bastará pues con ver que al darle semántica a ese tipo de fórmulas siempre se obtienen conjuntos medibles de estados. Pero eso puede probarse de forma directa usando inducción estructural en \mathcal{L} : por definición $\lambda \in \Lambda$, y por hipótesis inductiva $\llbracket \psi \rrbracket \in \Delta(\Sigma)$. Luego $H_{\lambda \times \llbracket \psi \rrbracket}$ es un generador de $\Lambda \otimes \Delta(\Sigma)$, lo cual gracias a la medibilidad de T nos dice que $T^{-1}(H_{\lambda \times \llbracket \psi \rrbracket}) \in \Sigma$, que es a lo que se quería llegar.

Se denotan $\llbracket \mathcal{L} \rrbracket \doteq \{\llbracket \varphi \rrbracket \mid \varphi \in \mathcal{L}\}$ y $\llbracket \mathcal{L}_\Delta \rrbracket \doteq \{\llbracket \psi \rrbracket \mid \psi \in \mathcal{L}_\Delta\}$. El párrafo anterior demuestra que $\llbracket \mathcal{L} \rrbracket \subseteq \Sigma$ y $\llbracket \mathcal{L}_\Delta \rrbracket \subseteq \Delta(\Sigma)$. Otras notaciones que se hallarán a lo largo de este capítulo son $\sigma(\mathcal{L})$, $\Delta(\mathcal{L})$ y $\mathcal{R}(\mathcal{L})$ para referirse a $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$, $\Delta(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$, y $\mathcal{R}(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ respectivamente. Para ello es necesario extender la definición de $\Delta(\mathcal{C})$ a colecciones arbitrarias $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$. De ahora en adelante se denota con $\Delta(\mathcal{C})$ a la σ -álgebra generada por los conjuntos $\Delta^{\geq q}(Q)$ tales que $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $Q \in \mathcal{C}$.

6.2. Caracterización de \sim_e

Según la Definición 5.4 una sub- σ -álgebra $\Xi \subseteq \Sigma$ es llamada bisimulación de evento cuando la función de transición T , del NLMP en cuestión, mantiene la medibilidad en el espacio reducido que plantea Ξ . Es posible formalizar la noción de “mantener la medibilidad”, para lo cual se usa el concepto de estabilidad de la Definición 3.17 (página 37), pero aplicado sobre familias de conjuntos.

Concretamente, las condiciones para que una colección Ξ sobre S sea una bisimulación de evento en el NLMP (S, Σ, Λ, T) son dos:

- ▷ Ξ debe ser una sub- σ -álgebra de Σ , y
- ▷ T debe ser un mapeo medible en $(S, \Xi) \rightarrow (\Lambda \otimes \Delta(\Sigma), H(\Lambda \times \Delta(\Xi)))$

La siguiente definición transporta el concepto de estabilidad al espacio de las familias de conjuntos. Esto resulta adecuado, puesto que así la condición de bisimulación de evento de una colección $\Xi \subseteq 2^S$, se expresa exclusivamente en términos de ella misma.

Definición 6.1. Dado un NLMP (S, Σ, Λ, T) , la colección $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$ es *estable* en él si:

$$\forall \lambda \in \Lambda. \forall \xi \in \Delta(\mathcal{C}). T^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) \in \mathcal{C}$$

Entonces una colección \mathcal{C} de subconjuntos de S es una bisimulación de evento si y sólo si es una sub- σ -álgebra estable de Σ . Esta notación permite abreviar de manera conveniente varios de los resultados que eventualmente llevarán hacia la caracterización de \sim_e por parte de \mathcal{L} . Tal caracterización se basa en el hecho de que $\sigma(\mathcal{L})$ es la menor σ -álgebra estable (ver Corolario 6.6). Presentaremos primero una serie de lemas que irán construyendo dicho resultado.

Lema 6.2. $[[\mathcal{L}_\Delta]] = \Delta(\mathcal{L})$

Demostración. Ya fue probado que $[[\mathcal{L}_\Delta]] \subseteq \Delta(\Sigma)$, pero aún no se sabe si ella misma es una σ -álgebra. Veamos que ese efectivamente es el caso:

I) $\Delta(S) \in [[\mathcal{L}_\Delta]]$, puesto que $[\top]_{\geq 0}$ es una fórmula de \mathcal{L}_Δ , y:

$$\begin{aligned} [[[\top]_{\geq 0}]] &= \Delta^{\geq 0}([\top]) \\ &= \Delta^{\geq 0}(S) \\ &= \{\mu \in \Delta(S) \mid \mu(S) \geq 0\} \\ &= \Delta(S) \end{aligned}$$

II) dada $\psi \in \mathcal{L}_\Delta$, entonces $[[\psi]]^c = [[\neg \psi]] \in [[\mathcal{L}_\Delta]]$

III) si para todo $i \geq 1$ se cumple $\psi_i \in \mathcal{L}_\Delta$, entonces $\bigcup_{i \geq 1} [[\psi_i]] = [[\bigvee_{i \geq 1} \psi_i]]$, y esa construcción claramente está en $[[\mathcal{L}_\Delta]]$

Estudiemos ahora un poco el otro lado de la igualdad a demostrar. Por la definición de σ -álgebra de Giry se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{L}) &= \Delta([[\mathcal{L}]]) \\ &= \Delta(\{[[\varphi]] \mid \varphi \in \mathcal{L}\}) \\ &= \sigma(\{\Delta^{\geq q}([[\varphi]]) \mid \varphi \in \mathcal{L} \wedge q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Nótese que cada generador $\Delta^{\geq q}([[\varphi]]) = [[[\varphi]_{\geq q}]] \in [[\mathcal{L}_\Delta]]$, y como $\Delta(\mathcal{L})$ es la menor σ -álgebra que contiene esta clase de conjuntos, queda demostrada la inclusión $\Delta(\mathcal{L}) \subseteq [[\mathcal{L}_\Delta]]$.

La otra inclusión se obtiene usando inducción estructural en \mathcal{L}_Δ . Lo que se busca probar es que para toda $\psi \in \mathcal{L}_\Delta$ se cumple $[[\psi]] \in \Delta(\mathcal{L})$. Como ya se demostró que $[[\mathcal{L}_\Delta]]$ es una σ -álgebra, el único caso no trivial lo plantean las fórmulas $\psi = [\varphi]_{\geq q}$, donde $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Pero por definición $[[\psi]] = [[[\varphi]_{\geq q}]] = \Delta^{\geq q}([[\varphi]])$, y por lo tanto la ecuación (6.1) nos dice que ese conjunto es un generador de $\Delta(\mathcal{L})$, lo cual implica que $[[\psi]] \in \Delta(\mathcal{L})$. ■

El Lema 6.2 permite probar un punto clave en la demostración principal de la sección. Se trata del Lema 6.4, el cual establece que $[[\mathcal{L}]]$ es un conjunto estable; más precisamente que $[[\mathcal{L}]]$ es un π -system estable. Un π -system es una familia de conjuntos cerrada bajo intersección finita y que contiene al conjunto total. Formalmente:

Definición 6.3. Sea Ω un conjunto y $\mathcal{P} \subseteq 2^\Omega$ una colección no vacía. Entonces \mathcal{P} es un π -system si cumple con las siguientes condiciones:

- $\Omega \in \mathcal{P}$
- $A \in \mathcal{P} \wedge B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}$

Lema 6.4. $[\mathcal{L}]$ es el menor π -system estable en cada NLMP (S, Σ, Λ, T) .

Demostración. Primero veamos que $[\mathcal{L}]$ es un π -system. $[\top] = S$ por definición, así que $S \in [\mathcal{L}]$. Por otra parte si $A_1, A_2 \in [\mathcal{L}]$ eso quiere decir que existen fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$ tales que $A_1 = [\varphi_1]$ y $A_2 = [\varphi_2]$. Luego $A_1 \cap A_2 = [\varphi_1] \cap [\varphi_2] = [\varphi_1 \wedge \varphi_2] \in [\mathcal{L}]$.

Probemos ahora que $[\mathcal{L}]$ es estable según la Definición 6.1. El Lema 6.2 asegura que por cada $\xi \in \Delta(\mathcal{L})$ existe una fórmula $\psi \in \mathcal{L}_\Delta$ tal que $\xi = [\psi]$. Sean pues $\lambda \in \Lambda$ y $\xi \in \Delta(\mathcal{L}) = \Delta([\mathcal{L}])$, donde $\psi \in \mathcal{L}_\Delta$ satisface $\xi = [\psi]$. Entonces:

$$T^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) = T^{-1}(H_{\lambda \times [\psi]}) = [\langle \lambda \rangle \psi] \in [\mathcal{L}]$$

Se sigue que $[\mathcal{L}]$ es una familia estable sobre (S, Σ, Λ, T) .

Por último veamos que es la menor de tales familias. Sea $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$ otra colección sobre S que también satisface las definiciones de π -system y de estabilidad respecto del NLMP en cuestión. Para probar que contiene a $[\mathcal{L}]$ es necesario realizar una inducción simultánea sobre las hipótesis $[\mathcal{L}] \subseteq \mathcal{C}$ y $[\mathcal{L}_\Delta] = \Delta(\mathcal{L}) \subseteq \Delta(\mathcal{C})$.

- I) $[\top] = S \in \mathcal{C}$, por ser éste un π -system
- II) si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$ satisfacen $[\varphi_1], [\varphi_2] \in \mathcal{C}$, entonces $[\varphi_1 \wedge \varphi_2] = [\varphi_1] \cap [\varphi_2] \in \mathcal{C}$, nuevamente porque \mathcal{C} es un π -system
- III) sean $\lambda \in \Lambda$ un conjunto de etiquetas y $\psi \in \mathcal{L}_\Delta$, entonces $[\langle \lambda \rangle \psi] = T^{-1}(H_{\lambda \times [\psi]}) = T^{-1}(H_{\lambda \times \xi})$, para algún $\xi \in \Delta(\mathcal{L})$ gracias al Lema 6.2. Pero entonces por hipótesis inductiva $\xi \in \Delta(\mathcal{C})$, y como por hipótesis \mathcal{C} es estable en (S, Σ, Λ, T) se sigue que $T^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) \in \mathcal{C}$
- IV) $[\bigvee_{i \in I} \psi_i] = \bigcup_{i \in I} [\psi_i] \in \Delta(\mathcal{C})$, porque $\Delta(\mathcal{C})$ es una σ -álgebra, I es un conjunto finito o numerable por definición, y cada $[\psi_i] \in \Delta(\mathcal{C})$ por hipótesis inductiva
- V) $[\neg \psi] = [\psi]^c \in \Delta(\mathcal{C})$, puesto que $\Delta(\mathcal{C})$ es una σ -álgebra que por hipótesis inductiva contiene a $[\psi]$
- VI) $[[\varphi]_{\geq q}] = \Delta^{\geq q}([\varphi])$. Por hipótesis inductiva $[\varphi] \in \mathcal{C}$, así que ese conjunto es un generador de la σ -álgebra $\Delta(\mathcal{C})$, por lo cual necesariamente $[[\varphi]_{\geq q}] \in \Delta(\mathcal{C})$

De I), II) y III) se sigue que $[\mathcal{L}] \subseteq \mathcal{C}$, que es lo que se quería demostrar. ■

El siguiente lema establece que si una colección estable es además un π -system, la condición de estabilidad de la Definición 6.1 se mantiene para la σ -álgebra por ella generada.

Lema 6.5. Si la colección \mathcal{C} es un π -system estable en un NLMP (S, Σ, Λ, T) , entonces $\sigma(\mathcal{C})$ también es estable en dicho NLMP

Demostración. Antes que nada observemos que la estabilidad de una colección \mathcal{C} es equivalente a la inclusión

$$\{T^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) \mid \lambda \in \Lambda \wedge \xi \in \Delta(\mathcal{C})\} \subseteq \mathcal{C}$$

En [Vig05, Lemma 3.6] se demuestra que $\Delta(\mathcal{C}) = \Delta(\sigma(\mathcal{C}))$ siempre y cuando \mathcal{C} sea un π -system. Como ese es precisamente el caso, y como \mathcal{C} es estable en (S, Σ, Λ, T) por hipótesis, se sigue que:

$$\{T^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) \mid \lambda \in \Lambda \wedge \xi \in \Delta(\sigma(\mathcal{C}))\} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$$

lo que demuestra que $\sigma(\mathcal{C})$ también es estable. ■

Corolario 6.6. $\sigma(\mathcal{L})$ es la menor σ -álgebra estable sobre un NLMP

Demostración. Denotemos con \mathcal{F} a la menor de las σ -álgebras estables sobre un NLMP (S, Σ, Λ, T) arbitrario pero fijo. Como toda σ -álgebra también es un π -system, se sigue que $\llbracket \mathcal{L} \rrbracket \subseteq \mathcal{F}$ en función del Lema 6.4, lo que a su vez implica que $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) \subseteq \mathcal{F}$, por ser $\sigma(\mathcal{L})$ la menor de las σ -álgebras que contienen a $\llbracket \mathcal{L} \rrbracket$. Además el Lema 6.5 aplicado sobre el resultado del Lema 6.4 nos dice que $\sigma(\mathcal{L})$ es otra σ -álgebra estable, lo cual nos da la inclusión $\sigma(\mathcal{L}) \supseteq \mathcal{F}$. Se sigue la igualdad buscada. ■

Ya estamos en condiciones de presentar el resultado principal de la sección.

Teorema 6.7. La lógica \mathcal{L} caracteriza a la bisimulación de evento. Es decir: $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \sim_e$

Demostración. Para probar la igualdad se usará un resultado estándar en teoría de la medida, que asegura que $\mathcal{R}(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) = \mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$. Sea $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \Lambda, T)$ un NLMP arbitrario, entonces el Corolario 6.6 prueba que $\sigma(\mathcal{L})$ es una sub- σ -álgebra de Σ estable respecto de \mathbb{S} . Y como se observó al comienzo de esta sección, eso equivale a decir que $\sigma(\mathcal{L})$ es una bisimulación de evento sobre \mathbb{S} , lo cual nos da la inclusión $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \mathcal{R}(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) = \mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)) \subseteq \sim_e$.

Para ver la inclusión inversa nótese que el Corolario 6.6 también dice que, de todas las bisimulaciones de evento que existen sobre \mathbb{S} , $\sigma(\mathcal{L})$ es la menor. Ahora bien, si Σ_1 y Σ_2 son dos σ -álgebras, puede probarse que $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ resulta en la inclusión inversa $\mathcal{R}(\Sigma_1) \supseteq \mathcal{R}(\Sigma_2)$. Luego lo que el Corolario 6.6 está diciendo es que, para toda bisimulación de evento Ξ en \mathbb{S} , siempre ocurre que $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \mathcal{R}(\sigma(\mathcal{L})) \supseteq \mathcal{R}(\Xi)$. Sean ahora s, t dos estados bisimilares por evento, es decir que $(s, t) \in \sim_e$. Entonces por definición existe una bisimulación de evento Ξ en \mathbb{S} tal que $(s, t) \in \mathcal{R}(\Xi)$. Luego por la observación anterior se tiene que $(s, t) \in \mathcal{R}(\mathcal{L})$, con lo cual se concluye que $\mathcal{R}(\mathcal{L}) \supseteq \sim_e$. ■

Con el Teorema 6.7 concluyen los resultados sobre las propiedades de la lógica introducida en este capítulo. La igualdad demostrada, $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \sim_e$, dice que dos estados de un NLMP son bisimilares por eventos si y sólo si satisfacen las mismas fórmulas de \mathcal{L} .

Componiendo los resultados de los Teoremas 5.7, 5.8 y 6.7 es posible reconstruir la cadena de inclusiones que ya había sido presentada para el modelo de los NLMP semi-estructurados, y que tiene validez sobre todos los procesos que pertenecen al modelo estructurado.

Teorema 6.8. $\sim_t \subseteq \sim_s \subseteq \sim_e = \mathcal{R}(\mathcal{L})$

Además con la caracterización de \sim_e por parte de \mathcal{L} , finalmente se dispone de todas las herramientas necesarias para probar que la relación \sim_e es en efecto una bisimulación de evento. Esto cierra las pruebas de la Proposición 5.9 del capítulo anterior.

Corolario 6.9. La relación \sim_e es una bisimulación de evento.

Demostración. Como ya se observó, al probar que $\sigma(\mathcal{L})$ es una σ -álgebra estable, el Corolario 6.6 está demostrando que es una bisimulación de evento. Por otro lado sabemos

que $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \mathcal{R}(\sigma(\mathcal{L}))$, y el Teorema 6.7 garantiza que $\sim_e = \mathcal{R}(\mathcal{L})$. Estas dos apreciaciones, en conjunto con la observación anterior, demuestran que existe una bisimulación de evento Ξ que satisface la igualdad $\sim_e = \mathcal{R}(\Xi)$. Se sigue por definición que \sim_e es una bisimulación de evento. ■

6.3. El NLMP \mathbb{S}_2 no distingue a \sim_s de \sim_e

Gracias al hecho de que \mathcal{L} caracteriza la relación de bisimulación \sim_e , es posible demostrar que el contraejemplo \mathbb{S}_2 (página 42), que permite distinguir las bisimulaciones de estado y de evento en el caso de los NLMP semi-estructurados, falla a tales efectos dentro del modelo estructurado con la nueva lógica y la nueva bisimulación de evento.

Para demostrar que en el sistema allí propuesto $\sim_s \neq \sim_e$, el fundamento del Corolario 3.27 es que \sim_e resultaba incapaz de distinguir los estados s y t , los cuales sí eran diferenciables para \sim_s . Como se mencionó en las conclusiones del Capítulo 3, dicha incapacidad se basa en que las fórmulas de la lógica del modelo semi-estructurado sólo pueden referirse a etiquetas individuales. Con la construcción $\bigvee_{i \in I} \psi_i$ es posible hablar de una cantidad numerable de acciones, pero eso también resulta insuficiente puesto que el ejemplo allí presentado cuenta con un espacio no numerable de estados.

En la teoría de los NLMP con estructura en las etiquetas, la construcción $\langle \lambda \rangle \psi$ de la lógica \mathcal{L} permite hablar de cualquier conjunto medible $\lambda \in \Lambda$ de acciones. Veamos de qué forma la nueva lógica permite diferenciar los estados s y t .

Antes que nada es necesario adecuar el proceso de la Sub-sección 3.5.3, denominado \mathbb{S}_2 , al modelo de los NLMP estructurados. Para ello se procede como se indicó en la Sub-sección 4.2.2 (página 50), escogiendo la σ -álgebra $\Lambda_2 \doteq \mathcal{B}(L_2)$ para el espacio de etiquetas. Recuérdese que la estructura que define a \mathbb{S}_2 es: $(S_2, \Sigma_2, L_2, \{T_a \mid a \in L_2\})$. A continuación se prueba que dicho proceso efectivamente puede ser transportado al universo estructurado.

Proposición 6.10. *El sistema $\mathbb{S}'_2 \doteq (S_2, \Sigma_2, \Lambda_2, T_\star)$ es un NLMP con estructura en las etiquetas.*

Demostración. Sólo es necesario probar que la función T_\star tiene como imagen a $\Lambda_2 \otimes \Delta(\Sigma_2)$, y que es medible como mapeo en el espacio $(S_2, \Sigma_2) \rightarrow (\Lambda_2 \otimes \Delta(\Sigma_2), H(\Lambda_2 \times \Delta(\Sigma_2)))$. Recuérdese que según la ecuación (4.3), página 52, para cada estado $y \in S_2$ se define:

$$T_\star(y) \doteq \{(b, \mu) \mid \exists b \in L_2 . \mu \in T_b(y)\}$$

Veamos ahora que la imagen de T_\star para cada uno de los estados de \mathbb{S}'_2 es un medible de la σ -álgebra producto $\Lambda_2 \otimes \Delta(\Sigma_2)$:

$$\begin{array}{llll} T_\star(t) = \{a\} \times \delta([0, 1]) & \in \Lambda_2 \otimes \Delta(\Sigma_2) & & \\ T_\star(s) = \{a\} \times \delta([2, 3]) & \in \Lambda_2 \otimes \Delta(\Sigma_2) & & \\ T_\star(r) = \{r\} \times \{\delta_x\} & \in \Lambda_2 \otimes \Delta(\Sigma_2) & \forall r \in [0, 1] & \\ T_\star(f(r)) = \{r\} \times \{\delta_x\} & \in \Lambda_2 \otimes \Delta(\Sigma_2) & \forall r \in [0, 1] & \\ T_\star(y) = \emptyset & \in \Lambda_2 \otimes \Delta(\Sigma_2) & \text{para todo otro } y \in S_2 & \end{array}$$

Sólo resta por probar la medibilidad de T_\star , para lo cual basta con ver que todo generador de $H(\Lambda_2 \otimes \Delta(\Sigma_2))$ es enviado por la imagen inversa de T_\star hacia algún medible del espacio de estados. O sea que si $\lambda \in \Lambda_2$ y $\xi \in \Delta(\Sigma_2)$, se busca probar que $T_\star^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) \in \Sigma_2$.

Ahora bien, como \mathbb{S}_2 es un NLMP semi-estructurado, para toda etiqueta $b \in L_2$ y conjunto de medidas $\xi \in \Delta(\Sigma_2)$ se cumple que $T_b^{-1}(H_\xi) \in \Sigma_2$. Obsérvese entonces que:

$$\begin{aligned}
 T_\star^{-1}(H_{\{b\} \times \xi}) &= \{y \in S_2 \mid T_\star(y) \cap (\{b\} \times \xi) \neq \emptyset\} \\
 &= \{y \in S_2 \mid \{(b, \mu) \mid \mu \in T_b(y)\} \cap (\{b\} \times \xi) \neq \emptyset\} \\
 &= \{y \in S_2 \mid \{\mu \in \Delta(S_2) \mid \mu \in T_b(y)\} \cap \xi \neq \emptyset\} \\
 &= \{y \in S_2 \mid T_b(y) \cap \xi \neq \emptyset\} \\
 &= T_b^{-1}(H_\xi)
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
 T_\star^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) &= T_\star^{-1}\left(H_{(\cup_{b \in \lambda} \{b\}) \times \xi}\right) \\
 &= \{y \in S_2 \mid T_\star(y) \cap ((\cup_{b \in \lambda} \{b\}) \times \xi) \neq \emptyset\} \\
 &= \bigcup_{b \in \lambda} \{y \in S_2 \mid T_\star(y) \cap (\{b\} \times \xi) \neq \emptyset\} \\
 &= \bigcup_{b \in \lambda} T_\star^{-1}(H_{\{b\} \times \xi}) \\
 &= \bigcup_{b \in \lambda} T_b^{-1}(H_\xi)
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

O sea que la imagen inversa para T_\star del generador $H_{\lambda \times \xi}$ es unión de elementos que se sabe son medibles de Σ_2 . Estudiando mejor dichos elementos mediante un análisis por casos, puede verse que las alternativas son:

$$T_a^{-1}(H_\xi) \in 2^{\{s,t\}} \qquad T_r^{-1}(H_\xi) = \begin{cases} \emptyset & , \delta_x \notin \xi \\ \{r, f(r)\} & , \delta_x \in \xi \end{cases}$$

donde la igualdad de la derecha se cumple para todo $r \in [0, 1]$. Entonces como $T_\star^{-1}(H_{\lambda \times \xi})$ es unión de tales conjuntos, debe ser que:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_\star^{-1}(H_{\lambda \times \xi}) & = & A & \uplus & \lambda & \uplus & f(\lambda) \\
 & & \cap & & \cap & & \cap \\
 & & \{s, t\} & \uplus & [0, 1] & \uplus & [2, 2.5]
 \end{array}$$

Gracias a que Λ_2 fue elegida Borel estándar se tiene que λ , visto como conjunto de estados, también es medible para Σ_2 . Además, escogiendo a f como una transformación lineal del $[0,1]$ en el $[2,2.5]$, también se obtiene que $f(\lambda) \in \Sigma_2$. Y claramente $A \in \Sigma_2$. Se sigue que $T_\star^{-1}(H_{\lambda \times \xi})$ es medible según Σ_2 , que es a lo que se quería llegar. ■

Antes de proseguir con el hilo central de la sección, se remarca un detalle interesante que aparece al final de la demostración anterior. Como ya se sabe, en los NLMPs semi-estructurados el espacio de etiquetas es arbitrario, no existen restricciones de ninguna

clase impuestas por el modelo. En contraste, la σ -álgebra Λ que acompaña las acciones en el mundo estructurado, tiene un efecto perceptible en el tipo de sistemas que son considerados NLMPs.

Para verlo estudiemos nuevamente el último párrafo de la prueba de la Proposición 6.10. El argumento empleado tiene éxito *gracias a que* Λ_2 es Borel estándar, al igual que Σ_2 . De no haber sido así, no podría afirmarse que λ , visto como conjunto de estados, es un medible de Σ_2 . Esto impediría afirmar que T_\star es medible, y por ende revocaría la prueba de que \mathbb{S}'_2 es un NLMP con estructura en las etiquetas.

Puede verse entonces como el espacio de etiquetas restringe los procesos dentro del modelo estructurado. Cualquier σ -álgebra de etiquetas que no satisfaga $\Lambda_2 \subseteq \Sigma_2$, resultará en un proceso fuera de la teoría.

Volvamos ahora al tema central. Veremos a continuación que, a pesar de que \mathbb{S}_2 fue transportado con éxito al modelo estructurado, ya no es válido como ejemplo que verifica $\sim_s \neq \sim_e$. El núcleo de este resultado es la expresividad aumentada de la nueva lógica.

La interpretación contrapositiva del Teorema 6.7 dice que dos estados *no son* bisimilares por eventos si existe alguna fórmula de \mathcal{L} que los distinga, es decir que sea satisfecha por uno y no por el otro. Pues bien, considérese la fórmula

$$\varphi = \langle a \rangle \neg [\langle [0, 1] \rangle [\top]_{\geq 1}]_{\geq 1}$$

Claramente ambos $\{a\}$ y $[0, 1]$ son medibles de Λ_2 , por haber sido elegido éste como un espacio Borel estándar. Por ende $\varphi \in \mathcal{L}$.

Nótese ahora que $s \models \varphi$, ya que los estados de $V \doteq (2, 2.5]$ a los que s puede llegar mediante a no pueden volver a saltar. En cambio $t \not\models \varphi$, pues todos los estados a los que t llega a través de la acción a tienen habilitada alguna de las acciones de $[0, 1]$. Por las observaciones anteriores esto dice que $s \not\sim_e t$ en el NLMP \mathbb{S}'_2 , que es a lo que se quería llegar.

6.4. Completitud para el caso analítico y finito

Como aporte final del trabajo en esta sección se prueba que, bajo ciertas restricciones de dominio, todas las bisimulaciones son caracterizadas por la lógica definida en este capítulo. Por lo tanto, para los NLMP estructurados que aquí se especifican, dos estados son tradicionalmente bisimilares si y sólo si son bisimilares por estado, si y sólo si son bisimilares por eventos, si y sólo si satisfacen las mismas fórmulas de \mathcal{L} .

Recuérdese que el Teorema 6.8 nos da la cadena de inclusiones

$$\sim_t \subseteq \sim_s \subseteq \sim_e = \mathcal{R}(\mathcal{L})$$

Por lo tanto sólo es necesario demostrar que $\mathcal{R}(\mathcal{L}) \subseteq \sim_t$, es decir que todo par de estados relacionados por la lógica son tradicionalmente bisimilares. Para ello se seguirá la misma estrategia empleada en [DSW11, Sección 5.1].

Para demostrar que $\mathcal{R}(\mathcal{L}) \subseteq \sim_t$ no se trabajará directamente con \mathcal{L} . En cambio se demuestra la completitud de una sub-lógica de ella, denominada \mathcal{L}_f , ideada para operar

sobre el espacio de los NLMPs de imagen finita. Como $\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}$ entonces $\mathcal{R}(\mathcal{L}_f) \supseteq \mathcal{R}(\mathcal{L})$, por lo cual la completitud de \mathcal{L}_f implica de forma directa la inclusión buscada.

La sintaxis de la nueva lógica se define como sigue:

$$\mathcal{L}_f : \quad \varphi \equiv \top \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \langle a \rangle [\bowtie_{i q_i} \varphi_i]_{i=1}^n$$

donde $\bowtie_i \in \{>, <\}$ y $q_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. La única producción que \mathcal{L}_f añade sobre las de \mathcal{L} puede expresarse, a través de un delicioso *azúcar sintáctico*, enteramente con fórmulas de \mathcal{L} . Concretamente:

$$\langle a \rangle [\bowtie_{i q_i} \varphi_i]_{i=1}^n \equiv \langle a \rangle \bigwedge_{i=1}^n [\varphi_i]_{\bowtie_i q_i} \quad (6.3)$$

donde la expresión $\bigwedge_{i=1}^n$ simboliza la conjunción lógica habitual de n términos. Por lo tanto su semántica está dada por:

$$\llbracket \langle a \rangle [\bowtie_{i q_i} \varphi_i]_{i=1}^n \rrbracket = T^{-1} \left(H_{\{a\} \times (\bigcap_{i=1}^n \Delta^{\bowtie_i q_i} (\llbracket \varphi_i \rrbracket))} \right)$$

La equivalencia (6.3) prueba que $\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}$. Nótese además que un estado s satisfará dicha fórmula si y sólo si $T(s) \cap (\{a\} \times \bigcap_{i=1}^n \Delta^{\bowtie_i q_i} (\llbracket \varphi_i \rrbracket)) \neq \emptyset$. O sea que para ello debe existir alguna medida $\mu \in T(s)|_a$ tal que para todo $i \in \{1..n\}$ se cumpla que $\mu(\llbracket \varphi_i \rrbracket) \bowtie_i q_i$.

Dejemos ahora de lado momentáneamente la lógica para concentrarnos en los procesos. Como ya se dijo, la contención $\mathcal{R}(\mathcal{L}) \subseteq \sim_t$ no es verdadera en el caso general. Para obtenerla es necesario restringir el dominio de los NLMPs estructurados sobre los que se trabaja. Concretamente el espacio medible de estados debe ser *analítico Borel estándar*, y la “cantidad de no determinismo” debe ser finita, condiciones que a continuación se describen en detalle.

Definición 6.11. Un espacio topológico (Ω, \mathcal{T}) es *polaco* si es separable (i.e. contiene algún conjunto denso y numerable) y completamente metrisable. Un espacio topológico es *analítico* si es la imagen continua de un polaco. Un espacio topológico es *analítico (Borel) estándar* si es isomorfo a $(\Omega, \sigma(\mathcal{T}))$, donde \mathcal{T} es una topología analítica sobre Ω .

El siguiente teorema muestra que en el caso de los espacios Borel analíticos, si una relación R es definida en términos de secuencias de medibles, entonces los conjuntos medibles y R -cerrados resultantes presentan “buenas propiedades”. Este resultado puede pensarse como la vuelta de la Proposición 2.17 I), ya que $\mathcal{R}(\sigma(\mathcal{F})) = \mathcal{R}(\mathcal{F})$.

Teorema 6.12 ([DePa03, Lemma 5.5]). Sean (S, Σ) un espacio analítico, y $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ una colección numerable que contiene al conjunto total S . Entonces: $\Sigma(\mathcal{R}(\mathcal{F})) = \sigma(\mathcal{F})$.

Veamos ahora a qué se le llama una “cantidad finita de no determinismo”.

Definición 6.13. Un NLMP estructurado (S, Σ, Λ, T) se denomina *de imagen finita*, o *con no determinismo finito*, si en todo estado $s \in S$ la cardinalidad de $T(s)$ es finita para cada acción individual $a \in L$. Es decir:

$$\forall s \in S . \forall a \in L . |(T(s)|_a)| < \infty$$

Las definiciones 6.11 y 6.13 terminan de describir el espacio sobre el que se trabaja en esta sección. El siguiente lema provee un marco general para demostrar que las lógicas que satisfacen ciertas propiedades caracterizan a la bisimulación tradicional. La prueba puede hallarse en [DSW11].

Lema 6.14 ([DSW11, Lemma 5.8]). *Sea (S, Σ, Λ, T) un NLMP con estructura en las etiquetas, tal que (S, Σ) es un espacio analítico Borel estándar. Sea a su vez \mathfrak{L} una lógica tal que:*

- I) \mathfrak{L} contiene los operadores \top y \wedge con su semántica usual;
- II) para toda fórmula $\varphi \in \mathfrak{L}$ el conjunto $\llbracket \varphi \rrbracket$ es Σ -medible;
- III) el conjunto de todas las fórmulas de \mathfrak{L} es numerable;
- IV) (propiedad de transferencia) para todo par de estados $s, t \in S$ relacionados por $\mathcal{R}(\mathfrak{L})$, y por cada medida $\mu \in T(s)|_a$, existe una medida $\nu \in T(t)|_a$ tal que:

$$\forall \varphi \in \mathfrak{L} . \mu(\llbracket \varphi \rrbracket) = \nu(\llbracket \varphi \rrbracket)$$

Entonces todo par de estados $s, t \in S$ que sean equivalentes según $\mathcal{R}(\mathfrak{L})$, también son tradicionalmente bisimilares.

El Lema 6.14 se cumple para cualquier lógica que satisfaga las hipótesis I)–IV). En particular \mathcal{L}_f tiene los operadores \top y \wedge , es numerable siempre y cuando el conjunto de etiquetas del NLMP en cuestión así lo sea, y todas sus fórmulas se interpretan como medibles de Σ , esto último porque $\llbracket \mathcal{L}_f \rrbracket \subseteq \llbracket \mathcal{L} \rrbracket \subseteq \Sigma$, donde la segunda inclusión fue probada a comienzos del capítulo.

Por ende la única condición del Lema 6.14 que no se sabe de forma inmediata si \mathcal{L}_f cumple es la IV), la propiedad de transferencia. El siguiente lema prueba que \mathcal{L}_f efectivamente satisface dicha propiedad, lo que deriva en la caracterización de \sim_t por parte de la lógica.

Lema 6.15. *Sea (S, Σ, Λ, T) un NLMP de imagen finita. Entonces para todo par de estados tal que $s \mathcal{R}(\mathcal{L}_f) t$, cada medida $\mu \in T(s)|_a$ tiene una medida asociada $\nu \in T(t)|_a$ tal que $\mu(\llbracket \varphi \rrbracket) = \nu(\llbracket \varphi \rrbracket)$ para cada $\varphi \in \mathcal{L}_f$.*

Demostración. Se procederá por el absurdo. Supóngase que existen estados $(s, t) \in \mathcal{R}(\mathcal{L}_f)$ para los que hay una medida $\mu \in T(s)|_a$ que no tiene pareja en $T(t)|_a$. O sea que para toda $\nu_i \in T(t)|_a$ existe alguna fórmula $\varphi_i \in \mathcal{L}_f$ tal que $\mu(\llbracket \varphi_i \rrbracket) \bowtie_i \nu_i(\llbracket \varphi_i \rrbracket)$, con $\bowtie_i \in \{>, <\}$. Como por hipótesis el conjunto $T(t)$ es finito, hay a lo sumo n tales medidas ν_i . Luego por la densidad de \mathbb{Q} se pueden elegir n racionales $q_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tales que:

$$\forall i \in \{1..n\} . \mu(\llbracket \varphi_i \rrbracket) \bowtie_i q_i \bowtie_i \nu_i(\llbracket \varphi_i \rrbracket)$$

Sea entonces $\psi \doteq \langle a \rangle [\bowtie_i q_i \varphi_i]_{i=1}^n \in \mathcal{L}_f$. Puede verse que $s \in \llbracket \psi \rrbracket$ mientras que $t \notin \llbracket \psi \rrbracket$, lo que contradice la hipótesis $s \mathcal{R}(\mathcal{L}_f) t$ y nos da el absurdo buscado. ■

Teorema 6.16. *Sea (S, Σ, Λ, T) un NLMP de imagen finita, donde (S, Σ) es un espacio analítico. Entonces para todo par de estados $s, t \in S$ se cumple que:*

$$s \sim_t t \Leftrightarrow s \sim_s t \Leftrightarrow s \sim_e t \Leftrightarrow s \mathcal{R}(\mathcal{L}_f) t$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 s \sim_t t &\implies s \sim_s t && \text{(Teorema 5.8)} \\
 &\implies s \sim_e t && \text{(Teorema 5.7)} \\
 &\iff s \mathcal{R}(\mathcal{L}) t && \text{(Teorema 6.7)} \\
 &\implies s \mathcal{R}(\mathcal{L}_f) t && \text{(pues } \mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L} \text{)} \\
 &\implies s \sim_t t && \text{(por Lemas 6.14 y 6.15)}
 \end{aligned}$$

■

6.5. Resumen

En este capítulo se redefinió la lógica \mathcal{L} para adecuarla al caso más específico de los NLMP con estructura en las etiquetas. Además se probó que, análogamente a lo que ocurría con el modelo semi-estructurado, la nueva lógica caracteriza a la bisimulación de evento definida en el Capítulo 5 (Teorema 6.7). Es decir que dado un NLMP estructurado, dos de sus estados serán bisimilares por eventos si y sólo si satisfacen las mismas fórmulas de la lógica.

Gracias a dicha caracterización se pudo refutar el contraejemplo denominado \mathbb{S}_2 , que en la Sección 3.5 fue utilizado para probar la desigualdad $\sim_s \neq \sim_e$. Es decir que dentro del modelo de los NLMP estructurados aún no está probado que las bisimulaciones de estado y de evento difieran.

Finalmente, dentro de un dominio restringido del modelo, se demostró la caracterización de \sim_t por parte de una sub-lógica de \mathcal{L} . Más específicamente: si la cantidad de no determinismo asociado a cada etiqueta es finito, y si su espacio estados es analítico, entonces las nociones de bisimulación tradicional, de estado y de evento coinciden, y son todas caracterizadas por la lógica \mathcal{L}_f (Teorema 6.16).

Con esto concluyen los resultados que este trabajo de grado se propone exponer.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se extendió la teoría sobre los procesos de Markov etiquetados no deterministas. Concretamente se enriqueció el modelo con una nueva σ -álgebra sobre el espacio de etiquetas, conformando el subconjunto de procesos que se denominaron NLMPs estructurados. Todos los resultados ya conocidos para el modelo más general (el que aquí se denomina semi-estructurado) fueron transportados con éxito a los NLMP con estructura en las etiquetas.

La necesidad de estudiar estas restricciones sobre el modelo original está principalmente impuesta por resultados ya conocidos, que demuestran la desigualdad entre las nociones de bisimulación definidas. Al fin y al cabo la idea del concepto de bisimulación es el mismo para todas: relacionar los procesos con *comportamientos similares*, para alguna definición del término. Por ello el acercamiento de las tres clases de bisimulación presentadas es uno de los mayores objetivos de la teoría de los NLMP en general, siempre en búsqueda de la igualdad $\sim_t = \sim_s = \sim_e$.

Varios estudios se están llevando a cabo actualmente en ese sentido. Sobre las igualdades que involucran a la bisimulación tradicional, no se sabe todavía nada concreto. Aún así, su naturaleza fuertemente restrictiva lo lleva a uno a pensar que difícilmente podrá hallarse una prueba que demuestre su coincidencia con las bisimulaciones de estado o de evento. No obstante el interrogante acerca de dicha coincidencia permanece abierto.

La investigación sobre la relación existente entre \sim_s y \sim_e hasta ahora ha resultado más fructífera en comparación. Al parecer los contraejemplos que refutan su igualdad abundan (ver [STe11]) cada vez que se fija un proceso concreto con un espacio de estados no analítico. Eso levanta la firme sospecha de que, en el escenario más general, estas bisimulaciones son distintas.

Ahora bien, los espacios analíticos ofrecen un caso sumamente general de espacio medible con buenas propiedades. Prácticamente todos los ejemplos de la vida cotidiana pueden ser codificados en un proceso cuyo espacio de estados es analítico, sino (más estricto aún) Borel estándar. Resulta entonces tentador plantear la restricción a este tipo de procesos, donde la igualdad $\sim_t = \sim_s = \sim_e$ fue probada aquí en el caso de un no determinismo finito, y en general aparece más cercana a la intuición.

Otro foco de interés activo en el marco de este trabajo es la interacción entre los modelos estructurado y semi-estructurado. Como se mencionó en la Sub-sección 4.2.2, no todo NLMP semi-estructurado puede ser transformado en un NLMP con estructura en las etiquetas. El proceso \mathbb{S}_1 y el Ejemplo 4.12 son casos concretos que demuestran la inclusión estricta entre los modelos. Sería deseable indagar más a fondo en las condiciones (no triviales) que le permiten a un proceso del modelo más general tener cabida en el más estricto.

Por otro lado existen formas de definir un NLMP con estructura en las etiquetas que difieren de la que se presentó en este trabajo. Por ejemplo, la medibilidad que se le exige a la función de transición no determinista T , es que su imagen inversa mapee cada generador $H_{\lambda \times \xi}$ en un medible de Σ . En cambio podría haberse definido esta medibilidad etiqueta por etiqueta a través de la a -sección, simulando las transiciones T_a del modelo semi-estructurado:

$$\begin{aligned} T(\cdot)|_a &\in (S, \Sigma) \rightarrow (\Delta(\Sigma), H(\Delta(\Sigma))) \\ T|_a^{-1}(H_\xi) &\in \Sigma \quad \text{para todo } a \in L, \xi \in \Delta(\Sigma) \end{aligned}$$

Puede probarse que esto generaría una transición distinta (en particular más estricta) de la que se dio en la Definición 4.5. Otra alternativa posible del modelo es considerar a los conjuntos $\{H_\theta \mid \theta \in \Lambda \otimes \Delta(\Sigma)\}$ como los generadores de la σ -álgebra de impactos $H(\Lambda \times \Delta(\Sigma))$. Con esto la medibilidad de la transición no determinista T se vería transformada en el predicado:

$$\forall \theta \in \Lambda \otimes \Delta(\Sigma) . T^{-1}(H_\theta) \in \Sigma$$

Todas estas opciones pueden ser objeto de estudios futuros en el campo.

Apéndice A

Más sobre medibilidad

El primer teorema presentado es el caballito de batalla de la mayoría de las pruebas que involucran medibilidad de funciones.

Teorema A.1. Sean $(S_1, \Sigma_1), (S_2, \Sigma_2)$ espacios medibles, y $\mathcal{C} \subseteq 2^{S_2}$ una colección tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \Sigma_2$. Entonces una función $f \in (S_1, \Sigma_1) \rightarrow (S_2, \Sigma_2)$ es medible si y sólo si:

$$\forall B \in \mathcal{C} . f^{-1}(B) \in \Sigma_1$$

En otras palabras: para probar la medibilidad de una función basta con restringirse a los generadores de la σ -álgebra destino.

Demostración. Sea $\Gamma \doteq \{B \in \Sigma_2 \mid f^{-1}(B) \in \Sigma_1\}$. El truco es probar que f satisface la cuantificación del enunciado si y sólo si $\Gamma = \Sigma_2$. Veamos primero que Γ es una σ -álgebra.

a) Como $\mathfrak{Dom}(f) = S_1$, entonces $f^{-1}(S_2) \subseteq S_1$. Por otro lado si $x \in S_1$ entonces $f(x) \in S_2$, luego $x \in \{s \in S_1 \mid f(s) \in S_2\} = f^{-1}(S_2)$, por lo cual $S_1 \subseteq f^{-1}(S_2)$ y en consecuencia $S_2 \in \Gamma$, dado que $S_2 \in \Sigma_2$.

b) Sea B cualquier subconjunto de S_2 , entonces $f^{-1}(B^c) = \{x \in S_1 \mid f(x) \in S_2 \setminus B\} = S_1 \setminus \{x \in S_1 \mid f(x) \in B\} = (f^{-1}(B))^c$. Supóngase ahora que $B \in \Gamma$. Eso significa que $f^{-1}(B) \in \Sigma_1$, luego por ser Σ_1 σ -álgebra: $(f^{-1}(B))^c \in \Sigma_1$. Pero entonces por la igualdad demostrada se sigue que $B^c \in \Gamma$.

c) Sea $\{B_i\}_{i \geq 1}$ una sucesión tal que cada miembro es un subconjunto de S_1 , entonces $f^{-1}(\cup_{i \geq 1} B_i) = \{x \in S_1 \mid f(x) \in \cup_{i \geq 1} B_i\} = \cup_{i \geq 1} \{x \in S_1 \mid f(x) \in B_i\} = \cup_{i \geq 1} f^{-1}(B_i)$. Luego si todos los B_i son elementos de Γ , debe ser que $f^{-1}(B_i) \in \Sigma_1$ para todo $i \geq 1$. Por ser σ -álgebra se sigue que $\cup_{i \geq 1} f^{-1}(B_i) \in \Sigma_1$. Entonces por la igualdad demostrada debe ser que $\cup_{i \geq 1} B_i \in \Gamma$.

Los incisos (a), (b) y (c) prueban que Γ es una σ -álgebra. Supóngase ahora que para cada $B \in \mathcal{C}$ se tiene que $f^{-1}(B) \in \Sigma_1$. Entonces Γ es una σ -álgebra que contiene a todos los conjuntos de \mathcal{C} . Luego como $\Sigma_2 = \sigma(\mathcal{C})$ es la menor σ -álgebra que contiene tales conjuntos se sigue que $\Sigma_2 \subseteq \Gamma$. Pero entonces por la definición de Γ debe ser que $\Sigma_2 = \Gamma$, lo que equivale a decir que f es medible. La vuelta (i.e. considerar a f medible por hipótesis) es directa puesto que $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_2$. ■

Otro resultado de uso común en teoría de la medida es que la restricción de conjuntos arbitrarios mantiene la calidad de σ -álgebra de la colección sobre la que se aplica.

Definición A.2. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$. Si Ω' es un subconjunto de Ω , la *restricción a Ω' de \mathcal{C}* es el conjunto:

$$\mathcal{C}|_{\Omega'} \doteq \{C \cap \Omega' \mid C \in \mathcal{C}\}$$

Lema A.3. Sean (S, Σ) un espacio medible y $S' \subseteq S$. Entonces $\Sigma|_{S'}$ es una σ -álgebra sobre S' .

Demostración. Hay que probar que $\Sigma|_{S'}$ contiene a S' y es cerrado bajo complemento (en S') y unión numerable.

a) $S \in \Sigma \implies S' = S \cap S' \in \Sigma|_{S'}$.

b) Sea $C' \in \Sigma|_{S'}$. Eso significa que existe algún $C \in \Sigma$ tal que $C' = C \cap S'$. Luego:

$$\begin{aligned} (C')^c &\doteq S' \setminus C' \\ &= S' \cap (C')^c \\ &= S' \cap (C^c \cup (S')^c) \\ &= (S' \cap C^c) \cup \emptyset \\ &= S' \cap C^c \\ &\in \Sigma|_{S'} \end{aligned}$$

puesto que $C^c \in \Sigma$. Luego $\Sigma|_{S'}$ es cerrado bajo complemento en S' .

c) Sea $\{C'_i\}_{i \geq 1}$ una sucesión de conjuntos pertenecientes a $\Sigma|_{S'}$. Entonces existen numerables C_i tales que $C'_i = S' \cap C_i$ para todo $i \geq 1$. Luego:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \geq 1} C'_i &= \bigcup_{i \geq 1} (S' \cap C_i) \\ &= S' \cap \left(\bigcup_{i \geq 1} C_i \right) \\ &\in \Sigma|_{S'} \end{aligned}$$

puesto que $\bigcup_{i \geq 1} C_i \in \Sigma$. ■

Es posible extender la noción de *relación inducida*, originalmente definida para σ -álgebras, a colecciones arbitrarias de subconjuntos. La idea es la misma: dados $s, t \in \Omega$ y $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$, se dice que $s \mathcal{R}(\mathcal{C}) t$ si y sólo si para todo conjunto $C \in \mathcal{C}$ se cumple que $s \in C \Leftrightarrow t \in C$. El siguiente resultado demuestra que el concepto de σ -álgebra generada “se porta bien” respecto de esta definición.

Propiedad A.4. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$. Entonces las relaciones inducidas por \mathcal{C} y por la σ -álgebra que \mathcal{C} genera son la misma. Es decir: $\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathcal{R}(\sigma(\mathcal{C}))$

Demostración. Como $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ entonces $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \supseteq \mathcal{R}(\sigma(\mathcal{C}))$. Para la vuelta se probará que todo $Q \in \sigma(\mathcal{C})$ satisface que $s \in Q \Leftrightarrow t \in Q$ para todo par de estados $(s, t) \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

Esta prueba es de naturaleza inductiva en la estructura de $\sigma(\mathcal{C})$

a) Si $Q = S$ claramente ambos $s, t \in Q$.

b) Sea $Q = (Q')^c$ para algún Q' que cumple con la propiedad. Entonces si $s \in Q$ eso significa que $s \notin Q'$, lo cual por contrapositiva de la hipótesis indica que $t \notin Q'$, ó equivalentemente que $t \in Q$. Es decir que $s \in Q \Leftrightarrow t \in Q$, que es a lo que se quería llegar.

c) La hipótesis es que $Q = \cup_{i \geq 1} Q_i$ para alguna sucesión $\{Q_i\}_{i \geq 1}$ cuyos integrantes están todos en $\sigma(\mathcal{C})$ y satisfacen $s \in Q_i \Leftrightarrow t \in Q_i$. Decir entonces que $s \in Q$ es equivalente a afirmar que existe algún Q_i tal que $s \in Q_i$, lo que ocurrirá si y sólo si $t \in Q_i$, que a su vez equivale a decir que $t \in Q$. Nuevamente pues $s \in Q \Leftrightarrow t \in Q$.

Entonces, como todo par $s \mathcal{R}(\mathcal{C}) t$ satisface que $s \in Q \Leftrightarrow t \in Q$ para cada medible $Q \in \sigma(\mathcal{C})$, se sigue que $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{R}(\sigma(\mathcal{C}))$. ■

La generación de σ -álgebras sobre productos cartesianos también merece algunos comentarios. Como sería de esperar, no todo elemento de la σ -álgebra producto puede ser desmembrado como el producto de elementos de cada una de las σ -álgebras que lo componen. Formalmente:

$$\theta \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n \not\Rightarrow \dots$$

$$\dots \not\Rightarrow \exists \{A_i\}_{i=1}^n \text{ tal que } \theta = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \wedge \forall i \in \{1..n\}. A_i \in \mathcal{F}_i$$

Si el resultado no resulta intuitivo basta con ver la Figura A.1 (a) para convencerse. Allí los espacios medibles en cuestión son (A, Σ_A) y (B, Σ_B) . La unión de los tres rectángulos (medibles) que aparecen en la figura es a su vez un rectángulo medible, puesto que las σ -álgebras son cerradas bajo uniones finitas. Sin embargo no existe ningún par de medibles $B_j \in \Sigma_B, A_i \in \Sigma_A$ tales que $A_i \times B_j$ forme a dicho rectángulo.

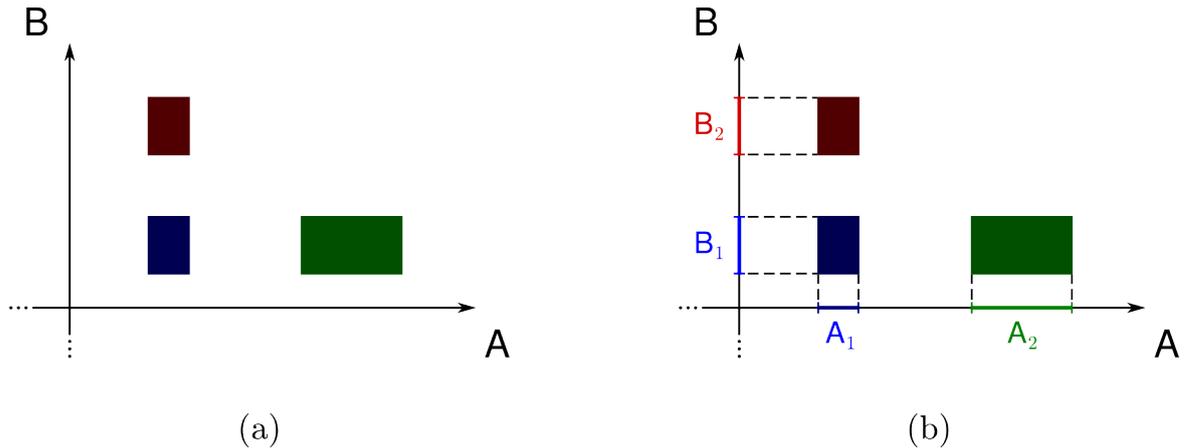


Figura A.1: Triángulo medible

Considérese ahora las *proyecciones* de los medibles $\theta \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$. Viendo a θ como un conjunto de n -uplas, su proyección sobre el j -ésimo espacio (A_j, \mathcal{F}_j) , a veces denotada $\text{proy}_{A_j}(\theta)$, es sencillamente el conjunto de las j -ésimas coordenadas de las n -uplas que conforman a θ . Una forma quizás más intuitiva de pensar en las proyecciones es como las “sombras” que θ proyecta sobre cada uno de los espacios que forman la σ -álgebra

producto. Para ilustrarlo, la Figura A.1 (b) muestra las proyecciones A_1 , A_2 , B_1 y B_2 de los rectángulos medibles que allí aparecen, en los conjuntos A y B respectivamente.

Pues bien, un error bastante común es pensar que las proyecciones de θ son siempre medibles en $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^n$. Es decir: que la j -ésima proyección de cualquier elemento de $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ es un elemento de \mathcal{F}_j . Por ejemplo esto sí se cumple en el rectángulo medible de la Figura A.1, donde $\text{proy}_A(\theta) = A_1 \cup A_2 \in \Sigma_A$, y $\text{proy}_B(\theta) = B_1 \cup B_2 \in \Sigma_B$.

Por desgracia, y a pesar de las creencias iniciales de Lebesgue, eso tampoco es cierto en el caso general. Eventualmente este error fue descubierto por Souslin, lo que lo llevó a definir los conjuntos analíticos y generar la teoría descriptiva de conjuntos. Para más información sobre el tema referirse a [Mos09, pág. 2].

Finalmente se incluyen un par de comentarios sobre los espacios analíticos. Uno de los resultados más interesantes del presente trabajo es que en ambos modelos de NLMP (el estructurado y el semi-estructurado) las tres bisimulaciones coinciden bajo ciertas condiciones, entre las cuales está que el espacio de estados (S, Σ) sea analítico. Como se mencionó, el estudio de los conjuntos y espacios analíticos comienza con los trabajos de Souslin y su maestro Lusin en lo que luego se denominaría *la teoría descriptiva de conjuntos* ([Kec95]). En lo que resta del apéndice se discuten someramente algunas de las propiedades que presenta este tipo de conjuntos.

Un espacio topológico (Ω, \mathcal{T}) (i.e. \mathcal{T} es topología sobre Ω) se dice *metrisable* si \mathcal{T} es inducida por alguna métrica $d \in \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$. A su vez \mathcal{T} es *separable* si contiene un conjunto denso y numerable. Un *espacio polaco* es un espacio topológico separable, que además es metrisable por alguna métrica completa. Algunos ejemplos de espacios polacos son \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , el cerrado $[0, 1]$, y los \mathbb{Q}_p^n , donde \mathbb{Q}_p es el campo p -aditivo de racionales.

La imagen de un espacio polaco a través de una función continua se denomina *conjunto analítico*. Considerando los ejemplos dados de conjuntos polacos, la enorme generalidad de un espacio analítico salta inmediatamente a la vista. En particular todo conjunto Borel es analítico, pero la recíproca no siempre es cierta.

Teorema A.5 ([Kec95, Teo. 14.2]). *Sea X un espacio polaco y denotemos con $\mathbf{A}(X)$ a la clase de los conjuntos analíticos sobre X . Entonces:*

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \mathbf{A}(X)$$

es decir: los conjuntos Borel sobre X son todos analíticos. Si X no es numerable:

$$\mathcal{B}(X) \subsetneq \mathbf{A}(X)$$

Proposición A.6 ([Kec95, Ex. 14.3]). *Sean X polaco y $A \subseteq X$. Son equivalentes:*

- I) *A es analítico.*
- II) *Existe un polaco Y y un Borel $B \subseteq X \times Y$ tales que $A = \text{proy}_X(B)$.*
- III) *Hay un $F \subseteq X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ cerrado tal que $A = \text{proy}_X(B)$.*

Proposición A.7 ([Kec95, Prop. 14.4]). *Si X es polaco y $A_n \subseteq X$ es analítico para todo $n \geq 1$, entonces $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ y $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ son ambos analíticos.*

Apéndice B

Pruebas de resultados mencionados

El siguiente lema prueba que es equivalente considerar las transiciones de probabilidad $\tau_a \in S \times \Sigma \rightarrow [0, 1]$ de los LMP, como funciones $\tau_a \in S \rightarrow \Delta(S)$ medibles en el espacio $(\Delta(S), \Delta(\Sigma))$.

Lema B.1. Sean $(S_1, \Sigma_1), (S_2, \Sigma_2)$ espacios medibles, $\Delta(\Sigma_2)$ la σ -álgebra de Giry sobre las medidas de probabilidad $\Delta(S_2)$. Entonces para todo mapeo $f \in S_1 \times \Sigma_2 \rightarrow [0, 1]$ la función $f \in S_1 \rightarrow \Delta(S_2)$ es medible si y sólo si $f(\cdot, Q) \in S_1 \rightarrow [0, 1]$ es medible para todo $Q \in \Sigma_2$.

Demostración. Antes que nada obsérvese que la notación $f \in S_1 \rightarrow \Delta(S_2)$ del enunciado ya asume que el mapeo f considerado como $f(s, \cdot) \in \Sigma_2 \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad para todo $s \in S_1$. También es importante mencionar que la medibilidad de $f(\cdot, Q)$ es considerada respecto del espacio Borel estándar $\mathcal{B}([0, 1])$.

Se quiere demostrar entonces que para todo $\mathbf{B} \in \mathcal{B}([0, 1])$ y $Q \in \Sigma_2$ el conjunto $f^{-1}(\Delta^{\mathbf{B}}(Q))$ es medible en Σ_1 si y sólo si $(f(\cdot, Q))^{-1}(\mathbf{B})$ también lo es. Veamos pues que:

$$f^{-1}(\Delta^{\mathbf{B}}(Q)) = \{s \in S_1 \mid f(s) = \mu \wedge \mu(Q) \in \mathbf{B}\} = (f(\cdot, Q))^{-1}(\mathbf{B})$$

Eso prueba la tesis para ambas σ -álgebras, pues abarca todos los generadores $\Delta^{\mathbf{B}}(Q)$ de $\Delta(\Sigma_2)$, y todos los generadores \mathbf{B} de $\mathcal{B}([0, 1])$. ■

La Propiedad B.2 prueba que la simetría de una relación R garantiza que todo conjunto de medidas de probabilidad medible en $\Delta(\Sigma(R))$, es a su vez R -cerrado para el lifting de R al espacio de medidas de probabilidad $\Delta(S)$.

Propiedad B.2 ([DSW11, Prop. 2.3]). Si R es una relación simétrica, entonces todo conjunto medible de $\Delta(\Sigma(R))$ es a su vez R -cerrado.

Demostración. Primero notemos que si R es simétrica entonces $\Sigma(R)$ es una σ -álgebra y por ende la σ -álgebra de Giry sobre el espacio de las medidas de probabilidad (i.e. $\Delta(\Sigma(R))$) está bien definida.

Sean ahora $Q \in \Sigma(R)$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{B}([0, 1])$. Si μ y ν son medidas de $\Delta(S)$, el predicado $\mu R \nu$ indica que para todo Q medible en Σ y R -cerrado se da la igualdad $\mu(Q) = \nu(Q)$.

Luego claramente $\mu R \nu$ implica que $\mu(Q) \in \mathbb{B}$ si y sólo si $\nu(Q) \in \mathbb{B}$, lo que demuestra que los generadores $\Delta^{\mathbb{B}}(Q)$ son R -cerrados.

Por otro lado, la simetría de R le otorga a la colección $\{\mathbf{A} \subseteq S \mid \mathbf{A} \text{ es } R\text{-cerrado}\}$ propiedades de σ -álgebra. O sea que la calidad de R -cerrado es preservada por complemento y unión numerable. Como el lifting de R al espacio de las medidas de probabilidad también es simétrica, se sigue que todo medible de $\Delta(\Sigma(R))$ es R -cerrado. ■

El lema que se presenta a continuación demuestra que si las funciones de transición de los NLMPs semi-estructurados son determinísticas (i.e. envían los estados sólo a deltas de Dirac), entonces su condición de funciones medibles es equivalente a la estabilidad respecto del mapeo $\langle a \rangle(\cdot) \in \Sigma \rightarrow S \rightarrow 2^S$.

Lema B.3 (Lema 3.18, página 37). *Sea (S, Σ) un espacio Borel estándar y $\Xi \subseteq \Sigma$ una sub- σ -álgebra. Supóngase que $T_a \in S \rightarrow \Delta(\Sigma)$ es no-probabilística, es decir que satisface $T_a(s) \subseteq \delta(S)$ para todo $s \in S$. Entonces $T_a \in (S, \Xi) \rightarrow (\Delta(\Sigma), H(\Delta(\Xi)))$ es una función medible si y sólo si Ξ es estable respecto de $\langle a \rangle(\cdot)$. Es decir sii $\forall Q \in \Xi. \langle a \rangle Q \in \Xi$.*

Demostración.

\Rightarrow) Sea $Q \in \Xi$ y agrupemos en ξ todas las medidas de probabilidad que a Q le otorgan un valor = 1. Formalmente:

$$\xi = \Delta(S) \setminus \Delta^{<1}(Q)$$

Entonces $\xi \in \Delta(\Xi)$ puesto que se construye como la resta de dos conjuntos de $\Delta(\Xi)$. Luego:

$$\begin{aligned} \langle a \rangle Q &\doteq \{s \in S \mid T_a(s) \cap \delta(Q) \neq \emptyset\} \\ &= \{s \in S \mid T_a(s) \cap \delta(S) \cap \xi \neq \emptyset\} \\ &= \{s \in S \mid T_a(s) \cap \xi \neq \emptyset\} && (T_a(s) \subseteq \delta(S)) \\ &= \{s \in S \mid T_a \in H_\xi\} \\ &= T_a^{-1}(H_\xi) \\ &\in \Xi && (\text{por hipótesis}) \end{aligned}$$

\Leftarrow) Recordemos que la Proposición 3.15 (a) nos asegura que la función $\delta_{(\cdot)} \in S \rightarrow \Delta(S)$ y su inversa $\delta_{(\cdot)}^{-1}$ son ambas medibles. Esto equivale a decir que:

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \Delta(\Sigma) . \delta^{-1}(\xi) \in \Sigma \\ \forall Q \in \Sigma . \delta(Q) \in \Delta(\Sigma) \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{Im}(\delta) = \mathfrak{Dom}(\delta^{-1}) = \delta(S) \subseteq \Delta(S)$, en la condición anterior puede restringirse la σ -álgebra $\Delta(\Sigma)$:

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \Delta(\Sigma) | \delta(S) . \delta^{-1}(\xi) \in \Sigma \\ \forall Q \in \Sigma . \delta(Q) \in \Delta(\Sigma) | \delta(S) \end{aligned}$$

lo cual a su vez es equivalente a la igualdad:

$$\{\delta(Q) \mid Q \in \Sigma\} = \Delta(\Sigma) | \delta(S) \tag{B.1}$$

La hipótesis es que Ξ es estable respecto de $\langle a \rangle(\cdot)$. Sea ahora $\xi \in \Delta(\Xi)$, luego por la ecuación (B.1) debe existir algún $Q \in \Xi$ tal que $\xi \cap \delta(S) = \delta(Q)$. Pero entonces:

$$\begin{aligned} T_a^{-1}(H_\xi) &= \{s \in S \mid T_a(s) \cap \xi \neq \emptyset\} \\ &= \{s \in S \mid T_a(s) \cap \delta(Q) \neq \emptyset\} && \text{(igualdad (B.1))} \\ &= \langle a \rangle Q \\ &\in \Xi && \text{(por hipótesis)} \end{aligned}$$

Como se indica en los comentarios de la Definición 1.5.1 de [Bil95]¹, haber probado que T_a envía los generadores de $H(\Delta(\Xi))$ en medibles de Ξ basta para asegurar su condición de función medible en $\Xi \rightarrow H(\Delta(\Xi))$. ■

La Proposición B.4 prueba la pertenencia de un NLMP al modelo semi-estructurado. Por otro lado, en el cuerpo del trabajo se demuestra que ese mismo sistema no es un NLMP estructurado. Esta distinción es posible gracias a la naturaleza no Borel de cierto subconjunto V de las etiquetas: el modelo más general trata las etiquetas una por una, por lo cual el hecho de que $V \notin \mathcal{B}([0, 1])$ no genera problemas. En cambio la imposición de una estructura sobre las etiquetas torna a V en un obstáculo infranqueable.

Proposición B.4. *El proceso \mathbb{S} del Ejemplo 4.12 es un NLMP semi-estructurado.*

Demostración. Recordemos que el sistema es $\mathbb{S} \doteq (S, \Sigma, L, \{T_a \mid a \in L\})$, donde:

$$\begin{aligned} S &= [0, 1] \uplus \{s, t\} \\ \Sigma &= \mathcal{B}(S) \\ L &= [0, 1] \\ T_r(s) &= \{\delta_0\} && \forall r \in V \\ T_r(r) &= \{\delta_t\} && \forall r \in [0, 1] \\ T_c(y) &= \emptyset && \text{para todo otro } c \in L, y \in S \end{aligned}$$

donde $V \subseteq [0, 1]$ no es un conjunto Borel. Queremos ver que \mathbb{S} satisface las condiciones de la Definición 3.1. Claramente $\emptyset \in \Delta(\Sigma)$, y los singuletes $\{\delta_0\}$ y $\{\delta_t\}$ son los generadores $\Delta^{\{1\}}(\{0\})$ y $\Delta^{\{1\}}(\{t\})$ respectivamente. Se sigue que las funciones de transición no deterministas del sistema mapean estados en medibles de $\Delta(\Sigma)$.

Sólo resta por ver que todas esas transiciones $T_a \in S \rightarrow \Delta(\Sigma)$ son medibles. Tómesese cualquier $\xi \in \Delta(\Sigma)$, entonces para cada acción $r \in [0, 1]$ se tiene que:

$$T_r^{-1}(H_\xi) = \begin{cases} \{s, r\} & \text{si } \delta_0, \delta_t \in \xi, \text{ y } r \in V \\ \{s\} & \text{si } \delta_0 \in \xi \text{ y } \delta_t \notin \xi, \text{ y } r \in V \\ \{r\} & \text{si } \delta_t \in \xi, \text{ y } \delta_0 \notin \xi \text{ ó } r \notin V \\ \emptyset & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Como Σ contiene los singuletes de S (por ser Borel), todos esos conjuntos son medibles en ella. Se sigue la medibilidad de T_r para toda etiqueta $r \in L$. ■

¹Ver Apéndice A, Teorema A.1.

Apéndice C

Schedulers y probabilidad de trazas

En muchos entornos reales es necesario poder calcular la probabilidad de que la ejecución de un computador siga tal o cual camino. El caso más típicamente citado es: “¿cual es la probabilidad de que el sistema alcance un estado de error?”

En el ámbito del modelado de procesos, el estudio de las trazas de ejecución es el método por excelencia usado para determinar los estados alcanzados por un programa. La estrategia consiste entonces en determinar qué tipo de trazas llevan al sistema a un estado indeseable, y a continuación se intenta calcular la probabilidad de que tales trazas ocurran.

Este proceder es factible en sistemas internamente determinísticos, o a lo sumo estocásticos, donde se puede sortear una variable aleatoria de distribución conocida. Aquí se trabaja con procesos que presentan no determinismo interno, lo cual vuelve imposible para el proceso *per se* calcular la probabilidad de una traza particular.

Por ejemplo, en la Figura C.1 la probabilidad de que se ejecute ‘*a*’ cuando el estado actual del proceso es s' es igual a 1. Pero ¿cual es la probabilidad de que se ejecute ‘*ca*’ partiendo desde el estado s ? Estudiando únicamente el sistema es imposible determinar si se elegirá μ ó ν a la hora de realizar la transición $s \xrightarrow{c} \{s', s''\}$.

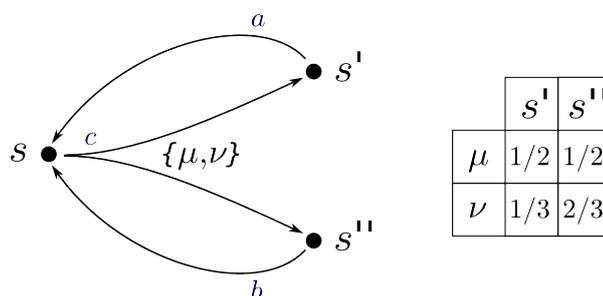


Figura C.1: NLMP finito con no determinismo

Para solucionar este asunto se suele delegar la resolución del no determinismo a un agente externo denominado *scheduler* o *política*. Hay abundante bibliografía referente a los schedulers para sistemas con un espacio finito o numerable de estados, como por ejemplo los autómatas probabilísticos de Segala y Lynch. El modelo de los NLMP cuenta con un aporte muy reciente en el campo por parte de Nicolás Wolovick en [Wol12].

Bibliografía

- [AnWi04] S. ANDOVA, TIM A.C. WILLEMSE ; *Branching Bisimulation for probabilistic systems: characteristics and decidability* ; Theoretical Computer Science , 356(3) pp. 325-355 (2006)
- [Ash99] R.B. ASH, C. DOLÉANS-DADE ; *Probability and Measure Theory* ; Harcourt/Academic Press (1999)
- [BaiK08] C. BAIER, J-P. KATOEN ; *Principles of Model Checking* ; The MIT Press (2008)
- [Bra02] M. BRAVETTI ; *Specification and Analysis of Stochastic Real-Time Systems* ; PhD thesis ; Università di Bologna, Padova, Venezia (2002)
- [Bil95] P. BILLINGSLEY ; *Probability and Measure* ; Wiley-Interscience (1995)
- [Dan06] V. DANOS, J. DESHARNAIS, F. LAVIOLETTE, P. PANANGADEN ; *Bisimulation and Congruence for Probabilistic Systems* ; Information and Computation, 204(4) pp. 503-523 (2006)
- [D'Ar99] P.R. D'ARGENIO ; *Algebras and Automata for Timed and Stochastic Systems* ; PhD thesis ; Department of Computer Science, University of Twente (1999)
- [CeD09] P. CELAYES, P.R. D'ARGENIO, P. SÁNCHEZ TERRAF, N. WOLOVICK ; *Non-deterministic labelled Markov processes: Bisimulations and logical characterization* ; Quantitative Evaluation of Systems, International Conference on, IEEE Computer Society, pp. 11-20 (2009)
- [DSW11] P.R. D'ARGENIO, P. SÁNCHEZ TERRAF, N. WOLOVICK ; *Bisimulations for non-deterministic labelled Markov processes* ; Mathematical structures in Computer Science (2011)
- [Des99] J. DESHARNAIS ; *Labelled Markov processes* ; PhD thesis ; School of Computer Sciences, McGill University (1999)
- [DeEd02] J. DESHARNAIS, A. EDALAT, P. PANANGADEN ; *Bisimulation for Labelled Markov Processes* ; Information and Computation, 179(2) pp. 163-193 (2002)
- [DePa03] J. DESHARNAIS, P. PANANGADEN ; *Continuous Stochastic Logic Characterizes Bisimulation of Continuous-time Markov Processes* ; J. Log. Algebr. Program, 56(1-2) pp. 99-115 (2003)

-
- [FräHa11] N. WOLOVICK ET AL. ; *Measurability and Safety Verification for Stochastic Hybrid Systems* ; International Conference on Hybrid Systems, Computation and Control - 14, Chicago, USA (2011)
- [Gir81] M. GIRY ; *A categorical approach to probability theory. In: Categorical Aspects of Topology and Analysis* ; Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics, 915 pp. 68-85 (1981)
- [HeMi85] M. HENNESSY, R. MILNER ; *Algebraic laws for nondeterminism and concurrency* ; Journal of the ACM, 32(1) pp. 137-162 (1985)
- [Kec95] A.S. KECHRIS ; *Classical descriptive set theory* ; Springer-Verlag Berlin (1995)
- [LaS91] K.G. LARSEN, A. SKOU ; *Bisimulation through probabilistic testing* ; Information and Computation, 94 pp. 1-28 (1991)
- [MaK06] J. MAGEE, J. KRAMER ; *Concurrency—State Models & Java Programs, 2nd Edition* ; John Wiley & Sons, Ltd (2006)
- [Mil80] R. MILNER ; *A Calculus of communicating systems* ; Springer-Verlag New York (1980)
- [Mil89] R. MILNER ; *Communication and Concurrency* ; Prentice Hall (1989)
- [Mos09] Y.N. MOSCHOVAKIS ; *Descriptive Set Theory. Second Edition* ; American Mathematical Society (2009)
- [PaSe07] A. PARMA, R. SEGALA ; *Logical characterizations of bisimulations for discrete probabilistic systems. In: Proceedings FoSSaCS 07* ; Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science, 4423 pp. 287-301 (2007)
- [STe11] P. SÁNCHEZ TERRAF ; *Unprovability of the logical characterization of bisimulation* ; Information and Computation, 209 pp. 1048-1056 (2011)
- [Str93] B. STRULO ; *Process Algebra for Discrete Event Simulation* ; PhD thesis ; Department of Computing, Imperial College, University of London (1993)
- [Vaill] N. VAILLANT ; *Probability Tutorials* ; www.probability.net ; Last updated: June 2011
- [Vig05] I.D. VIGLIZZO ; *Coalgebras on Measurable Spaces* ; PhD thesis ; Department of Mathematics, Indiana University (2005)
- [Wol12] N. WOLOVICK ; *Continuous Probability and Nondeterminism in Labelled Transition Systems* ; PhD thesis ; FaMAF, UNC, Argentina (2012)

